DER RAUM DER BOCHNER - INTEGRIERBAREN FUNKTIONEN $L_1(\mu,X)$ UND DIE $\sigma(L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X'))$ - TOPOLOGIE

Georg Schlüchtermann

Disbui. München
1987

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554822_0093

DER RAUM DER BOCHNER - INTEGRIERBAREN FUNKTIONEN $L_1(\mu,X)$ UND DIE $\sigma(L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X'))$- TOPOLOGIE

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

an der Fakultät für Mathematik

der Ludwig - Maximilians - Universität

München

vorgelegt von

Georg Schlüchtermann

München, den 22. Dezember 1986

1. Berichterstatter : Prof. Dr. Jürgen Batt

2. Berichterstatter : Priv.-Doz. Dr. Helmut Pfister

Tag der mündlichen Prüfung: 16.2.1987

DISSERTATIONS- UND FOTODRUCK FRANK GmbH
8000 München 2, Gabelsbergerstr. 15, Tel. 288663

Inhaltsangabe:

	Seite
Einleitung	1
§ 1. Vereinbarungen und Grundlegendes	8
§ 2. Das duale Paar $\langle L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X')\rangle$	50
2.1. Relativ σ'- kompakte Teilmengen	51
2.2. Die Mackey-Topologie $\tau(L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X'))$ auf $L_1(\mu,X)$	83
§ 3. Reguläre Borelmaße auf $L_1(\mu,X)$ und die Radon - Nikodým - Eigenschaft	117
§ 4. Renormierung von Teilräumen in $L_1(\mu,X)$	151
§ 5. Beispiele σ'-kompakt erzeugter Teilräume	229
Anhang	255
Literaturverzeichnis	263

Einleitung:

Der Banachraum der vektorwertigen Bochner-integrierbaren Funktionen $L_p(\mu,X) := L_p(S,\Sigma,\mu,X)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ wurde in den dreißiger Jahren von S. Bochner und A.E. Taylor für einen endlichen positiven Maßraum (S,Σ,μ) und einen Banachraum X eingeführt, wobei sich die Definition auf einen beliebigen positiven Maßraum erweitern läßt. Die Betrachtung der Bochner-integrierbaren Funktionen wurde durch die Entwicklung der Banachraumtheorie vorangetrieben. So entwickelte sich insbesondere die schwache Topologie des Raumes $L_1(\mu,X)$ zu einem intensiven Forschungsgebiet. Dabei stehen einerseits Liftingsprobleme, wie z.B. die Frage, ob jeder schwach folgenvollständige Banachraum X auch die schwache Folgenvollständigkeit von $L_1(\mu,X)$ impliziert, und andererseits die Charakterisierung relativ schwach kompakter Mengen in $L_1(\mu,X)$ im Vordergrund. Während das erste Problem positiv von M. Talagrand gelöst wurde (vgl. [49]), wurde bis jetzt für die Charakterisierung kein befriedigendes Ergebnis gefunden. Die Schwierigkeiten liegen besonders in der Darstellung des Dualraumes $L_1(\mu,X)'$, der sich genau dann durch die stark meßbaren Funktionen $L_\infty(\mu,X')$ beschreiben läßt, wenn X' die RNP bezüglich (S,Σ,μ) besitzt (vgl. [29] bzw. Korollar 2.2.9.). Dabei induziert jedes $g \in L_\infty(\mu,X')$ in kanonischer Weise eine stetige Linearform auf $L_1(\mu,X)$.

Es scheint deshalb interessant, auch die natürliche Paarung $\langle L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X')\rangle$ zu betrachten. Die von dem dualen Paar $\langle L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X')\rangle$ erzeugte schwache Topologe $\sigma' = \sigma(L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X'))$ wurde deshalb auch in den letzten Jahren intensiver erforscht. So standen am Beginn vor allem die relativ σ'-kompakten Teilmengen im Vordergrund. In den Arbeiten

J. Batt - N. Dinculeanu [3], J. Batt - W. Hiermeyer [4] und J.K. Brooks - N. Dinculeanu [8],[9] werden Charakterisierungen relativ σ'-kompakter Teilmengen angegeben. Dabei zeigt sich in [4] für einen endlichen Maßraum die Gleichheit relativ σ'-kompakter, relativ σ'-folgenkompakter und relativ σ'-abzählbar kompakter Teilmengen. Schließlich wird in der Arbeit von J. Batt - G. Schlüchtermann [5] versucht, die σ'-kompakten Teilmengen in die Klasse der kompakten Hausdorffräume einzuordnen. Der Raum $(L_1(\mu,X),\sigma')$ ist nämlich angelisch (vgl. (1.2.3.) zur Definition) und jede σ'-kompakte Teilmenge ein Eberlein Kompaktum, d.h. homöomorph zu einer schwach kompakten Teilmenge eines Banachraumes. Es sei noch erwähnt, daß sich H.A. Klei in seinen Arbeiten [34] und [35] mit der σ'-Konvergenz von Folgen in Verbindung mit einer Charakterisierung des Dualraumes X' beschäftigt. Insgesamt ist zu beachten, daß viele Ergebnisse, insbesondere die Betrachtung von σ'-kompakt erzeugten Teilräumen, vor allem dann von Interesse sind, wenn X' nicht die RNP bezüglich (S,Σ,μ) hat. In diesem Fall zeigen wir, daß $(L_1(\mu,X),\sigma')$ zu keinem Banachraum versehen mit der schwachen Topologie linear homöomorph ist, und die Resultate erhält man nicht sogleich aus den vorhandenen Ergebnissen in der Banachraumtheorie.

Im ersten Paragraphen werden die grundlegenden Begriffe eingeführt und bekannte Ergebnisse vorgestellt, die wir, da sie nicht in der benötigten Form verfügbar sind, neu aufbereiten und mit eigenem Beweis versehen. In der gesamten Arbeit werden wir einen positiven Maßraum (S,Σ,μ) zugrundelegen, der keine Atome mit unendlichem Maß besitzt. Dadurch können wir gewährleisten, daß sich das duale Paar $\langle L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X')\rangle$ bilden läßt.

Der zweite Paragraph ist ausschließlich der Behandlung des dualen Paares $\langle L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X')\rangle$ und dessen lokalkonvexen Topologien gewidmet. Wir setzen im ersten Teil die Untersuchung der relativ σ'-kompakten Teilmengen fort und verallgemeinern die Ergebnisse aus [4] bzw. [5] für einen positiven, nicht notwendig endlichen Maßraum. Dabei werden wir zeigen, daß jede σ'-kompakte Teilmenge ein Eberlein-Kompaktum und $(L_1(\mu,X),\sigma')$ angelisch ist. Man erhält diese Ergebnisse, in dem man $L_1(\mu,X)$ durch eine geeignete direkte Summe von L_1-Räumen darstellt, die jeweils über einen endlichen, positiven Maßraum definiert sind. Es gelingt uns somit ein Analogon zu dem bekannten Amir-Lindenstrauß-Theorem [1] für σ'-kompakt erzeugte Teilräume zu beweisen. Hiermit sind wir in der Lage, eine Charakterisierung relativ σ'-kompakter Mengen für beliebige positve Maßräume anzugeben. Sie wird aufzeigen, daß man sowohl im Fall $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ den Satz von James (vgl. [21, S.77, 6.8 Cor.]) zur Charakterisierung σ'-kompakter Teilmengen auf $(L_1(\mu,X),\sigma')$ übertragen, als auch die Gültigkeit des Satzes von Krein (vgl. [21, S.82, 7.1.]) in dieser Situation verifizieren kann, d.h. die konvexe Hülle einer relativ σ'-kompakten Teilmenge ist erneut relativ σ'-kompakt. Dies bildet den Obergang zum 2. Teil dieses Paragraphen , der Behandlung der Mackey-Topologie $\tau = \tau(L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X'))$. Die Definition dieser Topologie macht es notwendig, die relativ $(\sigma^* :=)\sigma(L_\infty(\mu,X'),L_1(\mu,X))$-kompakten Teilmengen in $L_\infty(\mu,X')$ zu untersuchen. Es ist bekannt, daß man $L_\infty(\mu,X')$ auf kanonische Weise in $L_1(\mu,X)'$ isometrisch einbetten kann, und daß im Falle eines positiven, endlichen Maßraumes $B(L_\infty(\mu,X'))$ $\sigma(L_1(\mu,X)',L_1(\mu,X))$-dicht in $B(L_1(\mu,X)')$ liegt. Wenn X' nicht die RNP bezüglich (S,Σ,μ) hat, so ist die Einheitskugel $B(L_\infty(\mu,X'))$ nicht σ^*-kompakt , und die Aufgabe läßt sich nicht mit dem Alaoglu-Bourbaki Argument behandeln. Wir müssen daher elementar die relativ σ^*-kompakten Mengen charak-

terisieren und stossen dabei allerdings auf Meßbarkeitsprobleme, die durch die Restriktion auf einen strikt lokalisierbaren Maßraum behebbar sind (vgl. (1.3.3.6.)). Die Gültigkeit der Aussagen von Krein bzw. James haben die Vermutung genährt, daß $(L_1(\mu,X),\tau)$ quasivollständig ist. Genau dieses Ergebnis werden wir als Hauptsatz für strikt lokalisierbare Maßräume formulieren. Im Anschluß daran lassen sich noch Aussagen über die relativ τ-kompakten Mengen machen, wobei wir die Gleichheit der relativ τ- und relativ $\|\cdot\|_1$-kompakten Teilmengen nachweisen. Als Folgerung ergibt sich sofort, daß $(L_1(\mu,X),\tau)$ genau dann metrisierbar ist, wenn X' die RNP bezüglich (S,Σ,μ) besitzt.

Die Behandlung ausgewählter geometrischer Eigenschaften von $L_1(\mu,X)$ werden wir im 3.und 4. Paragraphen vornehmen. Der 3. Paragraph ist der Frage gewidmet, wie man bei vorgegebenem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathbb{A},\mathbf{P})$ jene $\mathbf{P}$-stetige Vektormaße $m : \mathbb{A} \to L_1(\mu,X)$ von beschränkter Variation charakterisiert, die eine Bochnerdichte besitzen. Eng damit verbunden ist die Frage nach den abgeschlossenen, beschränkten und konvexen Teilmengen in $L_1(\mu,X)$ mit der RNP. Falls (S,Σ,μ) nicht rein atomar ist, läßt sich die Frage nicht einfach lösen (vgl. [14, S.63 / 64]). Es ist bekannt, daß konvexe, schwach kompakte Teilmengen die RNP besitzen (vgl.[7],S.60, Th. 3.6.1.), und somit stellt sich die Frage, ob auch jede σ'-kompakte und konvexe Teilmenge die RNP hat. Wir werden diese Frage positiv beantworten, und es zur Grundlage einer Charakterisierung differenzierbarer Vektormaße $m : \mathbb{A} \to L_1(\mu,X)$ machen. Ausgangspunkt für diese Ergebnisse ist die Betrachtung regulärer, endlicher Borelmaße auf $(L_1(\mu,X),\sigma')$ und deren Fortsetzbarkeit zu regulären Borelmaßen auf $(L_1(\mu,X),\|\cdot\|_1)$. Wir zeigen, daß die Abbildung $id : (L_1(\mu,X)\sigma')) \to (L_1(\mu,X),\|\cdot\|_1)$ im Sinne von L. Schwartz [44] universell meßbar ist

und sich damit jedes reguläre endliche Borelmaß auf $(L_1(\mu,X),\sigma')$ fortsetzen läßt. Dies erweitert die Ergebnisse von M. Talagrand (vgl. [50, S.204 - 207]) auf reguläre Borelmaße. $(L_1(\mu,X)\sigma')$ stellt ein Beispiel dafür dar, daß die Fortsetzbarkeit für nicht notwendig kompatible lokalkonvexe Topologien möglich ist (wenn X' nicht die RNP besitzt) bzw. die feinste kompatible lokalkonvexe Topologie (die Mackey-Topologie τ) nicht metrisierbar sein braucht, wie dies im Theorem von Phillps - Grothendieck - Dunford - Pettis gefordert wird (vgl. [44], S.162). Es sei noch vermerkt, daß A. Costé [11] sich dem Problem der Charakterisierung differenzierbarer Vektormaße $m : \mathbb{A} \to L_1(\mu,X)$ ebenfalls angenommen hat. Falls X die RNP besitzt, so beweist er, daß sich jedes $\mathbb{P}$-stetige Vektormaß $m : \mathbb{A} \to L_1(\mu,X)$ von beschränkter Variation genau dann durch eine Bochnerdichte darstellen läßt, wenn für jede Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{A}$ mit $\mathbb{P}(B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $(m(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ zum projektiven Tensorprodukt $c_0 \otimes L_1(\mu,X)$ gehört. Wir werden in der gleichen Situation ein Kriterium mittels einer Klasse von Operatoren $T : L_1(\mu,X) \to c_0$, die in [4, S.412] eingeführt wurden, gewinnen. Hieraus lassen sich für bestimmte abgeschlossene, beschränkte und konvexe Teilmengen weitere geometrische Eigenschaften ableiten.

Der vierte Paragraph geht auf spezielle Renormierungsfragen beliebiger Teilräume in $L_1(\mu,X)$ ein. Eines der ersten Ergebnisse im 2. Kapitel zeigt, daß σ'-kompakt erzeugte Teilräume strikt konvex renormierbar sind (das ergibt sich aus dem Analogon zum Amir - Lindenstrauß - Theorem). S. Troyanski [51] wies nach, daß man WCG-Banachräume lokal uniform konvex renormieren kann, was, wie wir zeigen werden, auch für σ'-kompakt erzeugte Teilräume gilt. Dies und die Frage, ob X lokal uniform konvex renormierbar auch die lokal uniform konvexe Renormierbarkeit von $L_1(\mu,X)$

nachsichzieht, sind der Ausgangspunkt für eine allgemeinere Problemstellung: Läßt sich eine hinreichende Bedingung für die Renormierbarkeit von Teilräumen $L \subset L_1(\mu,X)$ angeben, die ausschließlich die Integralwerte $I_A(L)$ berücksichtigt? Es wird das Hauptergebnis dieses Abschnittes sein, ein derartiges Kriterium zu entwickeln, wobei wir eine äquivalente lokal uniform konvexe Norm derart konstruieren, daß die σ'-Topologie mit der Normtopologie auf der renormierten Einheitssphäre zusammenfällt. Der Zugang zu diesem Ergebnis führt über die klassische Methode, nämlich eine geeignete Abbildung $Q : L \to c_0(\Gamma)$ zu konstruieren (vgl. [31],[55]). Wir beweisen, unabhängig von V. Zizler [55] und in modifizierter Form, ein Kriterium für die lokal uniform konvexe Renormierbarkeit, falls eine genügend große Anzahl von Projektionen existiert (vgl. Satz 3.2.3.). Es sei noch vermerkt, daß andere Methoden, wie sie in [23] bzw. [24] vorgestellt werden, nicht greifen, da dort bestimmte Voraussetzungen benötigt werden (z.B. werden Dualräume betrachtet), die $L_1(\mu,X)$ nicht erfüllt. Bei der Betrachtung von Teilräumen in $L_1(\mu,X)$ werden wir unser Kriterium als Induktionsschritt verwenden. Allerdings treten hier Probleme auf, denn die einzig geeigneten Projektionen bei der Behandlung eines endlichen Maßraumes stellt die lange Folge von bedingten Erwartungswertoperatoren dar, und man kann nicht annehmen, daß $\mathbb{E}_{\Sigma_0}(L) \subset L$ für einen beliebigen Teilraum und eine Teil-σ-Algebra gültig ist. Dies würde aber benötigt, um das Renormierungskriterium ohne Probleme anwenden zu können. Deshalb stellen wir für einen endlichen Maßraum (S,Σ,μ) $L_1(\mu,X)$ durch eine direkte Summe von $L_1(\nu,X)$-Räumen dar, die leichter zu behandeln sind. Es erhebt sich die noch offene Frage, ob die hinreichende Bedingung für die Renormierung von Teilräumen in $L_1(\mu,X)$ auch notwendig ist, denn Stetigkeitsargumente greifen nicht (man beachte, daß es eine Isometrie aufs Bild $T : \ell_1 \to \ell_\infty$ und damit eine stetige surjektive Abbildung $T^* : \ell_\infty' \to \ell_\infty$ gibt; AL-Räume wie ℓ_∞' sind lokal uniform konvex renormierbar, ℓ_∞ aber nicht).

Da wir insbesonders an einer Beziehung zwischen der σ'-Topologie und der Normtopologie interessiert sind, werden wir neben der lokal uniform konvexen Renormierbarkeit noch die Frage nach der Existenz einer äquivalenten σ'-Kadec-Norm behandeln (d.h. eine Norm, für die die σ'-Topologie mit der Normtopologie auf der Einheitssphäre übereinstimmt). Es sei angemerkt, daß es bis jetzt unbekannt ist, ob die Existenz einer äquivalenten Kadec-Norm auf einem Banachraum auch die lokal uniform konvexe Renormierbarkeit impliziert (vgl. [52]; man beachte, daß eine lokal uniform konvexe Norm eine Kadec-Norm ist), und es deshalb interessant erscheint, den Aspekt der σ'-Kadec-Norm parallel zu behandeln. Zur Vollständigkeit sei noch angeführt, daß in [12] für Banachverbände die Frage der lokal uniform konvexen Renormierbarkeit behandelt wird und auf $L_1(\mu,X)$ Anwendung findet. Ferner werden in [38] bzw. [47] für $1 < p < \infty$ Eigenschaften der $\|\cdot\|_p$-Norm auf $L_p(\mu,X)'$ untersucht und Liftingeigenschaften geklärt.

Schließlich geben wir im 5. Paragraphen Beispiele σ'-kompakt erzeugter Teilräume an, die nicht WCG sind. Insbesonderes das letzte Beispiel ist von Interesse, da es zeigt, daß es einen σ'-kompakt erzeugten Teilraum gibt, der sich nicht als normabgeschlossene lineare Hülle einer σ'-kompakten Teilmenge darstellen läßt.

Abschließend möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. J. Batt bedanken, der mich zu diesem Thema führte und diese Arbeit ermöglichte. Mein Dank gilt auch Herrn Priv.-Doz. Dr. H. Pfister für wertvolle Hinweise und Herrn Th. Schlumprecht für zahlreiche Gespräche und Anregungen.

§ 1. Vereinbarungen und Grundlegendes

In diesem einleitenden Kapitel werden die in der Arbeit verwendeten Bezeichnungen eingeführt, spezielle Vereinbarungen getroffen und bereits vorhandene Ergebnisse aus der Banach- bzw. Vektormaßtheorie angegeben, die in der Arbeit Verwendung finden. Dabei beziehen wir uns im besonderen auf die Monographien von J. Diestel [13], J. Diestel - J.J. Uhl Jr. [14], N. Dinculeanu [15] und J.K. Kelley - I. Namioka [33]. Schließlich werden noch einige Ergebnisse aus der Dissertation von W. Hiermeyer [28] zitiert.

1.1. Vereinbarungen:

Es sei $\mathbb{N} := \{1,2,3,\ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ferner ist ω die erste unendliche Ordinalzahl und $\aleph_0$ die Kardinalität von $\mathbb{N}$.

Weiter seien $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0\}$, $\mathfrak{B}$ die Borelmengen auf $\mathbb{R}$, $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ die Borelmengen auf $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und λ das Lebesgue'sche Maß.

Für eine Menge Ω und $A \subset \Omega$ sei $\complement A$ das Komplement von A in Ω, und wir definieren für $A,B \subset \Omega$ die symmetrische Differenz $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Ist C Teilmenge eines $\mathbb{K}$-linearen Raumes E, so seien $\operatorname{co} C$ bzw. $\operatorname{aco} C$ die konvexe bzw. absolut konvexe Hülle von C.

Für einen topologischen Raum $(T,\mathcal{T})$ und eine Teilmenge $A \subset T$ bezeichne $\bar{A}^{\mathcal{T}}$ oder $A^{-\mathcal{T}}$ die abgeschlossene Hülle von A in T.

In der gesamten Arbeit stellt X einen Banachraum über dem Körper $\mathbb{K}$ $(\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\})$, $X \neq \{0\}$ und X' sein topologisches Dual dar.

Ist $(Y, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, so bezeichnen wir mit

$B(Y) := \{y \in Y;\ \|y\| \leq 1\}$ die Einheitskugel von Y bzw. mit

$S(Y) := \{y \in Y;\ \|y\| = 1\}$ die Einheitssphäre von Y.

Weiter definieren wir für eine Menge I:

i) $\ell_\infty(I) := \{x : I \to \mathbb{K};\ (|x(\iota)|)_{\iota \in I}$ ist beschränkt$\}$

mit der Norm $\|\cdot\|_\infty : \ell_\infty(I) \to \mathbb{R};\ \|x\|_\infty := \sup\{|x(\iota)|;\ \iota \in I\}$

ii) $\ell_\infty^c(I) := \{x \in \ell_\infty(I);\ \{\iota \in I;\ x(\iota) \neq 0\}$ ist abzählbar$\}$

iii) $c_0(I) := \{x \in \ell_\infty(I);\ \forall\, \varepsilon > 0$ ist $\{\iota \in I;\ |x(\iota)| \geq \varepsilon\}$ endlich$\}$

iv) Ist $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, so setze man:

$c_0^+(I) := \{x \in c_0(I);\ \forall\, \iota \in I\ \ x(\iota) \geq 0\}$

v) $\ell_1(I) := \{x : I \to \mathbb{K};\ (|x(\iota)|)_{\iota \in I}$ ist summierbar$\}$

mit der Norm $\|\cdot\|_1 : \ell_1(I) \to \mathbb{R};\ \|x\|_1 := \sum_{\iota \in I} |x(\iota)|$

Falls $(X_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie von normierten Räumen ist und

$X := \left(\bigoplus_{\iota \in I} X_\iota\right)$, so bezeichne für $\iota \in I$

$pr_\iota : X \to X_\iota$ die Projektion auf die ι-te Komponente.

Für $x_\iota \in X_\iota$ sei $x_\iota e_\iota \in X$ definiert durch $(x_\iota e_\iota)_{\iota'} = 0$ falls $\iota \neq \iota'$

und $(x_\iota e_\iota)_\iota = x_\iota$.

Wenn es nicht anders vermerkt ist, setzen wir $\frac{0}{0} := 0$.

(1.2.) Lokalkonvexe Räume und Banachräume

Für $\mathbb{K}$-lineare Räume E, E' bezeichne $\langle E, E' \rangle$ das duale Paar von E und E' (vgl. [33, S.137-138]), wobei wir unter $\sigma(E,E')$ bzw. $\sigma(E',E)$ die entsprechenden schwachen Topologien verstehen wollen.

(1.2.1) Nach [33, S.138] sind diese Topologien regulär.

Ist $C \subset E$, so sei $C^0 := \{y \in E', \forall x \in C : |\langle x,y \rangle| \leq 1\}$ die "Polare" von C in E'.

Weiter bezeichnen wir mit $\tau(E,E')$ die "Mackey-Topologie" auf E des dualen Paares $\langle E,E' \rangle$ (vgl. [33, S.173]).

Wir wollen noch ein Ergebnis anführen:

(1.2.2.) Es seien Y_1, Y_2 normierte Räume, $Z_i \subset Y_i'$ lineare Teilräume, die auf Y_i total sind $(i = 1,2)$. Eine lineare, beschränkte Abbildung $T : Y_1 \to Y_2$ ist genau dann $\sigma(Y_1,Z_1) - \sigma(Y_2,Z_2)$-stetig, wenn für den adjungierten Operator $T^* : Y_2' \to Y_1'$ gilt: $T^*(Z_2) \subset Z_1$.

Beweis: "$\Rightarrow$": Weil T ein beschränkter, linearer Operator ist, existiert $T^* : Y_2' \to Y_1'$ und $T^* \in L(Y_2',Y_1')$. Da T $\sigma(Y_1,Z_1) - \sigma(Y_2,Z_2)$ stetig ist, folgt $T^*|_{Z_2} : Z_2 \to Z_1$ (vgl. [33, S.204, 21.5]) und $T^*(Z_1) \subset Z_2$.

"$\Leftarrow$": Wählen wir erneut den adjungierten Operator $T^* : Y_2' \to Y_1'$, dann gilt nach Voraussetzung $T^*|_{Z_2} : Z_2 \to Z_1$. Setzen wir $\tilde{T}^* := T^*|_{Z_2}$, so ist die Bedingung i) in [33, S.204, 21.5] erfüllt und T ist $\sigma(Y_1,Z_1) - \sigma(Y_2,Z_2)$-stetig. □

Wir werden nun einige Begriffe einführen, die wir später benützen:

(1.2.3.) Definition: Ein topologischer separierter Raum $(T,\mathcal{T})$ heißt "angelisch", wenn für jede relativ abzählbar kompakte Teilmenge $A \subset T$ gilt:

i) A ist relativ kompakt .

ii) Für jedes $x \in \overline{A}^{T}$ gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ mit $x_n \xrightarrow[T]{n\to\infty} x$.

(vgl. [21, S.30, Definition])

Die folgenden Begriffe spielen in der Untersuchung und Klassifizierung der Banachräume eine zentrale Rolle. Während sich der erste Begriff im Laufe der Zeit bildete, wurde der zweite von L. Vasak eingeführt.

(1.2.4.) Definition: Es seien Y ein Banachraum und Y'' sein Bidual.

a) Y heißt "schwach kompakt erzeugt" (kurz WCG), wenn es eine schwach kompakte Teilmenge $K \subset Y$ gibt, so daß $Y = \overline{\operatorname{span}}\, K$.

b) Y heißt "schwach abzählbar bestimmter Banachraum" (kurz WCD), wenn es eine Folge von $\sigma(Y'',Y')$-kompakten Teilmengen $C_n \subset Y''$ $(n \in \mathbb{N})$ gibt, so daß für alle $y \in Y$ eine unendliche Teilmenge $N \subset \mathbb{N}$ existiert mit $y \in \bigcap_{n\in N} C_n \subset Y$ (vgl. [53, S.12, Def. 2]) .

(1.2.5.) Bemerkung: Offenbar ist jeder WCG-Banachraum auch ein WCD-Banachraum (vgl. [53, S.12, Remark 1]). Durch ein Gegenbeispiel von M. Talagrand (vgl. [48, S.415-417]) wird klar, daß die Umkehrung nicht gilt.

(1.2.6.) Definition: Wir nennen einen normierten Raum $(Y, \|\cdot\|)$ "strikt konvex", falls für linear unabhängige Elemente $x,y \in Y$ gilt:

$\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$.

(1.2.7.) Definition:

a) Ein normierter Raum $(Y, \|\cdot\|)$ heißt "lokal uniform konvex", wenn für jede Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S(Y)$ und $y_0 \in S(Y)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n + y_0\| = 2$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n - y_0\| = 0$.

Der normierte Raum $(Y, \|\cdot\|)$ heißt "lokal uniform konvex renormierbar", wenn es auf Y eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Norm $|||\cdot|||$ gibt, so daß $(Y, |||\cdot|||)$ lokal uniform konvex ist.

b) Ist $(Y, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und ist $Z \subset Y'$ ein auf Y totaler Teilraum, so nennen wir $\|\cdot\|$ eine "$\sigma(Y,Z)$-Kadec-Norm", falls auf $S(Y, \|\cdot\|)$ die $\|\cdot\|$-Topologie mit der $\sigma(Y,Z)$-Topologie zusammenfällt. Ist $Z = Y'$, so nennen wir die Norm einfach eine "Kadec-Norm".

(1.2.7.1.) Bemerkung:

a) Ein normierter Raum $(Y, \|\cdot\|)$ ist genau dann lokal uniform konvex, wenn für jede Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ und jedes $y_0 \in Y$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\| = \|y_0\|$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n + y_0\| = 2\,\|y\|$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n - y_0\| = 0$.

b) Jeder lokal uniform konvex normierte Raum ist strikt konvex.

c) Ist $(Y, \|\cdot\|)$ ein lokal uniform konvexer Raum und sind $(y_\alpha)_{\alpha\in A} \subset S(Y)$ ein Netz, $y \in S(Y)$ mit $\lim\limits_{\alpha\in A} \|y_\alpha + y\| = 2$, so gilt $\lim\limits_{\alpha\in A} \|y_\alpha - y\| = 0$.

Beweis: zu c) Annahme: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $\alpha_0 \in A$ ein $\alpha \geq \alpha_0$ existiert mit $\|y_\alpha - y\| \geq \varepsilon$.

Dann gibt es eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ mit $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, so daß $|\,\|y_{\alpha_n} + y\| - 2\,| < \frac{1}{n}$ und $\|y_{\alpha_n} - y\| \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dies aber steht im Widerspruch zur lokal uniform Konvexität von $(Y, \|\cdot\|)$.

Konstruktion der Folge durch vollständige Induktion.

n = 1: Es gibt ein $\alpha_{0,1} \in A$, so daß für alle $\alpha \geq \alpha_{0,1}$: $\left| \|y_\alpha + y\| - 2 \right| < 1$.

Nach Annahme gibt es ein $\alpha_1 \geq \alpha_{0,1}$, so daß $\|y_{\alpha_1} - y\| \geq \varepsilon$.

Induktionsannahme: Es sei die Folge bereits für $k \leq n$ mit $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_n$ konstruiert.

Induktionsschluß: Es gibt ein $\alpha_{0,n+1} \in A$, $\alpha_{0,n+1} \geq \alpha_n$, so daß für alle $\alpha \geq \alpha_{0,n+1}$ $\left| \|y_\alpha - y\| - 2 \right| < \frac{1}{n+1}$.

Erneut nach Annahme findet man ein $\alpha_{n+1} \geq \alpha_{0,n+1}$, so daß $\|y_{\alpha_{n+1}} - y\| \geq \varepsilon$. □

(1.2.7.2.) Sei nun Δ eine unendliche Menge und $p : c_0(\Delta) \to \mathbb{R}$ die Day-Norm (vgl. [13, S.94]). Nach [13, S.95] ist (c_0, p) lokal uniform konvex.

Wir betrachten die Topologie ρ auf $\mathbb{R}$, die durch das System der Umgebungsbasen $\mathfrak{U}(x) := \{]x - \varepsilon, \infty[; \varepsilon > 0\}$ $(x \in \mathbb{R})$ erzeugt wird. Weiter sei $(\mathbb{R}^\Delta, \gamma) := \prod_{\delta \in \Delta} (\mathbb{R}, \rho)$.

Es seien $(T, \mathcal{T})$ ein weiterer topologischer Raum und $Q: T \to c_0(\Delta)$ derart, daß für alle $\delta \in \Delta$ $Q(\cdot)(\delta) : T \to \mathbb{R}$ $\mathcal{T}$ - nach unten halbstetig ist.

Die Definition der Produkttopologie γ zeigt, daß

(1.2.7.3.) $Q : T \to c_0^+(\Delta)$ $\mathcal{T} - (c_0^+(\Delta) \cap \gamma)$ - stetig ist.

(1.2.7.4.) Wir zeigen nun, daß $p : c_0^+(\Delta) \to \mathbb{R}$ $c_0^+(\Delta) \cap \gamma$ - nach unten-halbstetig ist.

Beweis: Sei dazu $a > 0$ und $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \subset c_0^+(\Delta)$ ein Netz, $x \in c_0^+(\Delta)$ mit $p(x_\alpha) \leq a$ und $x_\alpha \to x$ in $c_0^+(\Delta) \cap \gamma$. Angenommen, es gelte $p(x) > a$. Für $x = x(\delta)_{\delta\in\Delta}$ sei $\{x(\delta_i);\ 0 < x(\delta_{i+1}) \leq x(\delta_i), i \in \mathbb{N}\} = \{x(\delta);\ x(\delta) \neq 0\}$. Nach Annahme und der Definition von p gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$,

so daß $\sum_{j=1}^{m} \frac{x(\delta_j)^2}{2^{2j}} - \varepsilon > a^2$.

Nach der Definition der Topologie γ existiert ein $\alpha_0 \in A$, so daß für alle $\alpha \geq \alpha_0$ und für alle $j = 1,\dots,m$

$$x_\alpha(\delta_j)^2 \in \,]x(\delta_j)^2 - \varepsilon, \infty[\quad .$$

Also gilt für alle $j = 1,\dots,m$ und alle $\alpha \geq \alpha_0$

$$\frac{x(\delta_j)^2}{2^{2j}} - \frac{\varepsilon}{2^{2j}} < \frac{x_\alpha(\delta_j)^2}{2^{2j}} \quad ,$$

und damit hat man für $\alpha \geq \alpha_0$ den Widerspruch :

$$a^2 < \sum_{j=1}^{m} \frac{x(\delta_j)^2}{2^{2j}} - \varepsilon < \sum_{j=1}^{m} \frac{x_\alpha(\delta_j)^2}{2^{2j}} \leq a^2 \ . \qquad \square$$

Dabei ergibt sich die letzte Ungleichung aus der folgenden Aussage:

(1.2.7.5.) Ist für $y \in c_0^+(\Delta)$ $E(y) := \{\alpha \in \Delta;\ y(\alpha) > 0\} = \{\alpha_n;\ y(\alpha_n) \geq y(\alpha_{n+1})\}$ und ist $\{\beta_j;\ j \in \mathbb{N}\} \subset \Delta$, so gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} 4^{-j}\, y(\beta_j)^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} 4^{-j}\, y(\alpha_j)^2, \quad \text{denn}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} 4^{-j}\, y(\beta_j)^2 = \sum_{\substack{j=1 \\ \beta_j \in E(y)}}^{\infty} 4^{-j}\, y(\beta_j)^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} 4^{-j}\, y(\alpha_j)^2$$

nach [13. S.95(1)].

Aus (1.2.7.3) und (1.2.7.4) folgt:

(1.2.7.6.) Die Abbildung $p \circ Q : T \longrightarrow \mathbb{R}$ ist T-nach unten halbstetig.

(1.2.7.7.) Es seien $(Y, \|\cdot\|)$ ein lokal uniform konvex normierter Raum und $Z \subset Y'$ ein Teilraum, der auf Y total ist.
Ist nun $\|\cdot\| : Y \to \mathbb{R}$ $\sigma(Y,Z)$ - nach unten halbstetig, dann fällt auf $S(Y, \|\cdot\|)$ die $\sigma(Y,Z)$-Topologie mit der Normtopologie zusammen.

<u>Beweis:</u> Wir wählen ein Netz $(y_\iota)_{\iota\in I} \subset S(Y, \|\cdot\|)$ und $y \in S(Y, \|\cdot\|)$, so daß $y_\iota \xrightarrow{\iota \in I} y$ in $(Y, \sigma(Y,Z))$. Da $(Y,\|\cdot\|)$ lokal uniform konvex ist, brauchen wir nur zu zeigen, daß $\lim\limits_{\iota \in I} \|y + y_0\| = 2$ gilt (vgl. (1.2.7.1)).

Wir nehmen an:

(*) Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $\iota_0 \in I$ ein $\iota \geq \iota_0$ existiert mit $\|y_\iota + y\| \leq 2 - \varepsilon$.

Es sei $\mathfrak{U}$ der $\sigma(Y,Z)$-Umgebungsfilter von $2y$. Nach Voraussetzung gilt: $y_\iota + y \xrightarrow{\iota \in I} 2y$ in der $\sigma(Y,Z)$-Topologie. Somit findet man zu $U \in \mathfrak{U}$ ein $\iota_0(U) \in I$ derart, daß für alle $\iota \geq \iota(U)$ $y_\iota + y \in U$ gilt.
Nach (*) gibt es aber ein $\iota(U) \geq \iota_0(U)$ mit $\|y_{\iota(U)} + y\| \leq 2 - \varepsilon$.
Setze $y_U := y_{\iota(U)} + y$.
Definiert man auf $\mathfrak{U}$ die Ordnung $U \subseteq V :\Longleftrightarrow V \subset U$, so bildet $(y_U)_{U\in\mathfrak{U}}$ ein Netz, das nach Definition in der $\sigma(Y,Z)$-Topologie gegen $2y$ konvergiert. Es gilt andererseits für alle $U \in \mathfrak{U}$: $\|y_U\| \leq 2 - \varepsilon$.
Da $\|\cdot\|: Y \to \mathbb{R}$ $\sigma(Y,Z)$-nach unten halbstetig ist, folgt $\|2y\| \leq 2 - \varepsilon$, ein Widerspruch zu $y \in S(Y, \|\cdot\|)$. □

(1.2.7.8.) Sind $(Y, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $Z \subset Y'$ ein auf Y totaler Teilraum, so ist $\|\cdot\|: Y \to \mathbb{R}$ genau dann eine $\sigma(Y,Z)$-Kadec-Norm, falls für jedes Netz $(y_\iota)_{\iota\in I} \subset Y$ und $y \in Y$ mit $y_\iota \xrightarrow[\iota \in I]{} y$ in $(Y, \sigma(Y,Z))$ und $\lim\limits_{\iota \in I} \|y_\iota\| = \|y\|$, auch $\lim\limits_{\iota \in I} \|y_\iota - y\| = 0$ gilt.

<u>Beweis:</u> <u>"⇒":</u> Es sei $y \neq 0$ (sonst ist die Aussage klar).

Wähle $\iota_0 \in I$, so daß für alle $\iota \geq \iota_0$

$$\frac{3}{2}\,\|y\| \geq \|y_\iota\| \geq \frac{\|y\|}{2} \quad \text{und setze für } \iota \geq \iota_0$$

$$\hat{y}_\iota := (\|y_\iota\|)^{-1}\, y_\iota \quad \text{bzw.} \quad \hat{y} := (\|y\|)^{-1}\, y \quad .$$

Dann gilt: $\hat{y}_\iota \to \hat{y}$ in $(S(Y, \|\cdot\|), \sigma(Y,Z) \cap S(Y, \|\cdot\|))$.

<u>Denn:</u> Es seien $z \in Z$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $\iota_1 \geq \iota_0$ derart, daß für alle $\iota \geq \iota_1$

$$\Big|\,\|y_\iota\| - \|y\|\,\Big| < \frac{\varepsilon\|y\|}{2(\|z\| + 1)} \quad \text{und}$$

$$|\langle y_\iota - y, z\rangle| < \frac{\varepsilon\|y\|}{2} \quad , \quad \text{so gilt für } \iota \geq \iota_1$$

$$|\langle \hat{y}_\iota - \hat{y}, z\rangle| \leq$$

$$\left|\left\langle \frac{y_\iota\|y\|}{\|y_\iota\|\,\|y\|} - \frac{y_\iota\|y_\iota\|}{\|y_\iota\|\,\|y\|}, z\right\rangle\right| + \left|\left\langle \frac{y_\iota}{\|y\|} - \frac{y}{\|y\|}, z\right\rangle\right| \leq$$

$$\frac{1}{\|y_\iota\|\,\|y\|}\,|\langle y_\iota, z\rangle|\,\Big|\,\|y\| - \|y_\iota\|\,\Big| + \frac{1}{\|y\|}\,|\langle y_\iota - y, z\rangle| <$$

$$\frac{\|z\|}{\|y\|} \cdot \frac{\varepsilon\,\|y\|}{2(\|z\| + 1)} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \; .$$

Damit haben wir $\hat{y}_\iota \xrightarrow{\iota \in I} \hat{y}$ in $(S(Y, \|\cdot\|), \sigma(Y,Z) \cap S(Y, \|\cdot\|))$. Also folgt nach Voraussetzung $\lim\limits_{\iota \in I} \|\hat{y}_\iota - \hat{y}\| = 0$.

Da aber auch $\lim\limits_{\iota \in I} \|y_\iota\| = \|y\|$ gilt, erhält man $\lim\limits_{\iota \in I} \|y_\iota - y\| = 0$.

<u>"⇐":</u> Dies ergibt sich sofort aus der Definition der Spurtopologie $\sigma(Y,Z) \cap S(Y, \|\cdot\|)$. □

(1.3.) Der Raum der Bochner-integrierbaren Funktionen

Wir betrachten in der gesamten Arbeit einen positiven Maßraum (S,Σ,μ) (S eine nichtleere Menge, $\Sigma \subset \mathrm{Pot}(S)$ eine σ-Algebra und $\mu : \Sigma \to [0,\infty]$ ein Maß mit $\mu(S) > 0$) mit seiner Vervollständigung $(S,\overline{\Sigma},\overline{\mu})$.

(1.3.1.) Bezeichnungen und grundlegende Begriffe

(1.3.1.1.) Ist $\mathfrak{g} \subset \mathrm{Pot}(S)$, so bezeichne $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ die von $\mathfrak{g}$ erzeugte Algebra und $\sigma(\mathfrak{g})$ die von $\mathfrak{g}$ erzeugte σ-Algebra. Wir nennen $\mathfrak{g}$ den Erzeuger von $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ bzw. $\sigma(\mathfrak{g})$.

(1.3.1.2.) Für einen positiven Maßraum (S,Σ,μ) setze man

$$\Sigma_e := \{A \in \Sigma;\ \mu(A) < \infty\}.$$

(1.3.1.3.) Ist (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum, so heißt $A \in \Sigma$ ein "Atom", wenn $\mu(A) > 0$ und für alle $B \subset A$, $B \in \Sigma$ gilt: $\mu(B) = 0$ oder $\mu(A) = \mu(B)$.

(1.3.1.4.) Für einen positiven Maßraum (S,Σ,μ) und $A \in \Sigma$ bezeichnen wir mit $\mu_{|A}$ die Einschränkung von μ auf $\Sigma \cap A$.

(1.3.1.5.) Ist $\mathfrak{A} \subset \mathrm{Pot}(S)$, $\mathfrak{A} \neq 0$, so nennen wir $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{A}$ eine "$\mathfrak{A}$-Zerlegung" von S falls $\mathfrak{Z}$ aus disjunkten Teilmengen besteht mit $S = \bigcup_{A \in \mathfrak{Z}} A$.

(1.3.1.6.) Es seien (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum und $\lambda > \omega$ eine Limesordinalzahl. Wir nennen eine Familie von Teil-σ-Algebren $(\Sigma_\alpha)_{\omega \le \alpha < \lambda}$ eine "verallgemeinerte Folge von Teil-σ-Algebren", wenn

i) für alle $\alpha,\beta,\ \omega \leq \alpha < \beta \leq \lambda : \Sigma_\alpha \subset \Sigma_\beta$,

ii) für alle Limesordinalzahlen $\beta,\ \omega \leq \beta < \lambda$:

$$\Sigma_\beta = \sigma(\bigcup_{\alpha<\beta} \Sigma_\alpha).$$

iii) $$\Sigma = \sigma(\bigcup_{\alpha<\lambda} \Sigma_\alpha).$$

(1.3.1.7.) Es sei (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum. Dann bezeichne $d\mu : \Sigma_e \times \Sigma_e \to \mathbb{R}_+$, $d\mu(A,B) := \mu(A \Delta B)$ die kanonische Halbmetrik auf Σ_e. Wir sagen (S,Σ,μ) ist "separabel", falls es eine bezüglich $d\mu$ abzählbare dichte Teilmenge in Σ_e gibt.

(1.3.1.8.) Ist $(\Omega,\mathbb{A},\mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und I eine nichtleere Menge, so gilt für den Produktraum $(\prod_{i\in I} \Omega, \bigotimes_{i\in I} \mathbb{A}, \bigotimes_{i\in I} \mathbb{P})$:

Die Algebra der Zylinderungen

$$\mathbb{Z} := \{A \in \bigotimes_{i\in I} \mathbb{A};\ A = B \times \prod_{i\in I\setminus T} \Omega,\ T \subset I \text{ endlich und } B \in \bigotimes_{i\in T} \mathbb{A}\}$$

liegt bezüglich der Halbmetrik $d(C,D) := \bigotimes_{i\in I} \mathbb{P}\,(C \Delta D)$ dicht in $\bigotimes_{i\in I} \mathbb{A}$

(vgl. [26, S.156, S.157 Th B, S.158 (2)]).

(1.3.1.9.) Ist (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum, so definieren wir für eine Algebra $\mathbb{A} \subset \Sigma$ und einen normierten Raum Y über $\mathbb{K}$, den $\mathbb{K}$-linearen Raum der einfachen Funktionen

$$\mathbb{E}(S,\mathbb{A},\mu,Y) := \{f : S \to Y;\ f = \sum_{i=1}^{k} y_i \chi_{A_i},\ y_1,\dots,y_k \in Y$$

$$A_i \in \mathbb{A},\ \mu(A_i) < \infty,\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j,\ (1 \leq i,j \leq k)\}$$

(χ_A ist die charakteristische Funktion von A).

(1.3.1.10) Ist (S,Σ,μ) ein endlicher positiver Maßraum, dann gibt es eine höchstens abzählbare Menge $(A_i)_{i\in I} \subset \Sigma$ von Atomen, so daß für $S' := S \setminus \bigcup_{i\in I} A_i$ der Maßraum $(S',\Sigma\cap S',\mu|_{\Sigma\cap S'})$ atomlos ist.

<u>Beweis:</u> Es sei $\mathfrak{P} := \{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma;\ A_n \cap A_m = \emptyset$ falls $n \neq m$, $n,m \in \mathbb{N}$, und A_n ist ein Atom $(n \in \mathbb{N})\}$

$\mathfrak{P}$ kann mit "$\subset$" teilweise geordnet werden. Ist $\mathfrak{P}$ leer, so ist (S,Σ,μ) rein nicht atomar und $I = \emptyset$.

Falls nun $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}$ eine nichtleere totalgeordnete Teilmenge ist, so hat man auch $\bigcup\mathfrak{R} \in \mathfrak{P}$, <u>denn:</u>

Für alle $A \in \bigcup\mathfrak{R}$ ist A ein Atom und für $A,B \in \bigcup\mathfrak{R}$, $A \neq B$, gibt es eine abzählbare Teilmenge $\{A_n;\ n \in \mathbb{N}\} \in \mathfrak{R}$ derart, daß $A,B \in \{A_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Damit gilt $A \cap B = \emptyset$. Da $\mu(S) < \infty$, ist insbesondere $\bigcup\mathfrak{R}$ abzählbar. Nach dem Zornschen Lemma gibt es dann ein maximales Element $\{A_\iota;\ \iota \in I\} \in \mathfrak{P}$. Setzt man $S' := S \setminus \bigcup_{\iota\in I} A_\iota$, so besitzt aufgrund der Maximalität von $\{A_\iota;\ \iota \in I\}$ $(S',\Sigma\cap S',\mu|_{\Sigma\cap S'})$ keine Atome. □

Wir benötigen noch ein Ergebnis über endliche, separable und positive Maßräume.

(1.3.1.11) Es sei (S,Σ,μ) ein separabler, endlicher und positiver Maßraum, dann gibt es eine aufsteigende Folge endlicher Σ-Zerlegungen $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, daß:

(1) $\pi_1 = \{S\}$

(2) Für alle $A \in \Sigma$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $B \in \mathfrak{A}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_n)$ aus der von $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_n$ erzeugten Algebra mit $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$.

(3) Für alle $\varepsilon > 0$ ist die Menge $\{A \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_n;\ \mu(A) \geq \varepsilon\}$ endlich

Beweis:

1. Fall: (S,Σ,μ) ist rein nicht atomar. Dann ist (S,Σ,μ) maßisomorph zu $([0,1], \mathcal{B} \cap [0,1], \lambda)$ (vgl. [26, S.173, Th. C]). Damit gibt es eine aufsteigende Folge $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ von endlichen Σ-Zerlegungen, die (1) und (3) erfüllen (man verwende die Zerlegung von $[0,1]$ in dyadische Intervalle und beachte die Maßisomorphie). (2) ergibt sich nach [26, S.172, Th. B].

2. Fall: Es existiert eine Folge paarweise disjunkter Atome $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ mit $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dann setze man $\pi_n := \{A_1,\ldots, A_{n-1}, S \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\}$ und (1) ist nach Definition erfüllt, während (3) sich aufgrund der Endlichkeit des Maßraumes ergibt. Ist nun $A \in \Sigma$, so gibt es wegen der Eigenschaft des Maßraumes eine Teilmenge $J \subset \mathbb{N}$ mit $\mu(A \,\Delta\, (\bigcup_{n\in J} A_n)) = 0$. Da der Maßraum als endlich vorausgesetzt ist, findet man also ein $B \in \mathfrak{A}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_n)$ und $\mu(A \,\Delta\, B) < \varepsilon$ zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$.

3. Fall: (S,Σ,μ) besitze Atome, dann gibt es nach (1.3.1.10) eine abzählbare Menge $(A_i)_{i\in I} \subset \Sigma$, so daß für $S' := S \setminus \bigcup_{i\in I} A_i$ $(S',\Sigma \cap S',\mu|_{\Sigma'\cap S'})$ rein nicht atomar ist, wobei wir $\mu(S') > 0$ annehmen. Bildet man $\pi_1 := \{S\}$ und für $n \geq 2$ $\pi_n := \pi_n^1 \cup \pi_n^2$, wobei $(\pi_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ die Zerlegungsfolge des 1. Falles für $(S',\Sigma \cap S',\mu|_{\Sigma\cap S'})$ und $(\pi_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ die Zerlegungsfolge aus dem 2. Fall für $(S \setminus S',\Sigma \cap S \setminus S',\mu|_{\Sigma \cap S \setminus S'})$ sind, so genügt diese Zerlegungsfolge nach Fall 1) und 2) (1), (2) und (3). □

(1.3.2.) Meßbarkeit

Wir folgen der Definition in N. Dinculeanu [15]. Für einen positiven Maßraum (S,Σ,μ) definieren wir: Eine Abbildung $f : S \to X$ heißt μ-meßbar, wenn gilt:

i) Für alle offenen $G \subset X$ ist $f^{-1}(G) \in \overline{\Sigma}$.

ii) Für alle $A \in \overline{\Sigma}$, $\overline{\mu}(A) < \infty$ gibt es ein $N \in \overline{\Sigma}$, $\overline{\mu}(N) = 0$, so daß $f(A \setminus N)$ separabel ist.

[15, S.89, Definition 4 bzw. S.64, 4., S.67 Definition 3, S.75 Definition 6]

(1.3.2.1.) Bemerkung:

i) Ist $\mu(S) < \infty$, so genügt in ii): Es gibt $N \in \overline{\Sigma}, \overline{\mu}(N) = 0$, so daß $f(S \setminus N)$ separabel ist.

ii) Wenn $f : S \to X$ eine μ-meßbare Funktion ist, dann gilt für jedes $A \in \overline{\Sigma}$, so daß $(A, \overline{\Sigma} \cap A, \overline{\mu}_{|A})$ σ-finit ist: Es existiert $N \in \overline{\Sigma}, \overline{\mu}(N) = 0$ und eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(S,\overline{\Sigma},\overline{\mu},X)$ mit $g_n \to f$ auf $A \setminus N$ punktweise und $\|g_n(t)\| \leq \|f(t)\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in A \setminus N$ [15, S.99, Theorem 2].

(1.3.3.) Integration

Für eine μ-meßbare Funktion $f : S \to X$ ist $\|f(\cdot)\| : S \to \mathbb{R}$ erneut eine μ-meßbare Funktion. Auf $\mathcal{E}(S,\overline{\Sigma}_e,\overline{\mu},X)$ definieren wir das Integral wie folgt:

Für $f \in \mathcal{E}(S,\overline{\Sigma}_e,\overline{\mu},X)$ mit $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}$ und $A \in \Sigma_e$ sei

$\int_A f \, d\mu := \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mu(A_i \cap A)$ [15, S.108, Definition 1].

Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(S,\overline{\Sigma}_e,\overline{\mu},X)$ heißt Cauchy-Folge, wenn gilt:

$\int_S \|f_n - f_m\| \, d\mu \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0.$

Wir nennen eine μ-meßbare Funktion $f : S \to X$ μ-integrierbar, wenn es eine Cauchy-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(S,\overline{\Sigma}_e,\mu,X)$ gibt, so daß ein $N \in \overline{\Sigma}, \overline{\mu}(N) = 0$ mit $\|f_n(s) - f(s)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ für alle $s \in S \setminus N$ existiert. Für $A \in \overline{\Sigma}$ definieren wir dann

$$\int_A f \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu \qquad \text{[15, S. 120, Definition 1].}$$

Wir definieren weiter

$$\mathcal{L}_1(\mu,X) := \mathcal{L}_1(S,\Sigma,\mu,X) := \{f : S \to X \; ; \; f \text{ ist } \mu\text{-integrierbar}\}.$$

(1.3.3.1.) Dann wird $\mathcal{L}_1(\mu,X)$ mit $\|f\|_1 := \int_S \|f(s)\| \, d\mu(s)$ zu einem vollständigen halbnormierten Raum und $\mathcal{E}(S,\Sigma_e,\mu,X)$ ist dicht in $\mathcal{L}_1(\mu,X)$. [25, S.127 - 129, Korollar zu Proposition 12, Theorem 1]. Setzen wir $\mathcal{N}(\mu,X) := \{f : S \to X \; ; \; f \text{ ist } \mu\text{-meßbar}, f(s) = 0 \text{ für } s \in S \setminus N$ $N \in \overline{\Sigma}, \mu(N) = 0\}$, so ist $\mathcal{N}(\mu,X) \subset \mathcal{L}_1(\mu,X)$ abgeschlossen, und $L_1(\mu,X) := \mathcal{L}_1(\mu,X) / \mathcal{N}(\mu,X)$ ist ein Banachraum mit der Norm $\|\tilde{f}\|_1 := \|f\|_1$, wobei $f \in \tilde{f}$ ein Repräsentant der Äquivalenzklasse ist. [15, S.128].

<u>Vereinbarung:</u> Wir werden in der Arbeit nicht immer explizit zwischen f und der Äquivalenzklasse $\tilde{f}$ unterscheiden.

Weiter definiere man für eine μ-meßbare Funktion $f : S \to X$

$\|f\|_\infty := \inf\{\alpha > 0; \overline{\mu}(\{s \in S; \|f(s)\| > \alpha\}) = 0\}$ und bilde

$\mathcal{L}_\infty(\mu,X) := \mathcal{L}_\infty(S,\Sigma,\mu,X) := \{f : S \to X; \; f \; \mu\text{-meßbar}, \|f\|_\infty < \infty\}$.

Dann ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Halbnorm auf $\mathcal{L}_\infty(\mu,X)$, und $\mathcal{L}_\infty(\mu,X)$ ist damit vollständig [15, S.161, Proposition 13].

Analog zu $L_1(\mu,X)$ definiere man $L_\infty(\mu,X) := \mathcal{L}_\infty(\mu,X) / \mathcal{N}(\mu,X)$, so daß $L_\infty(\mu,X)$ zu einem Banachraum wird [15, S.162].

Wir führen noch zwei Teilräume von $\mathcal{L}_\infty(\mu,X)$ bzw. $L_\infty(\mu,X)$ ein.

(1.3.3.2.)

- $\mathcal{L}^e_\infty(\mu,X) := \{f \in \mathcal{L}_\infty(\mu,X);\ \bar{\mu}(\{s \in S;\ \|f(s)\| > 0\}) < \infty\}$

  (bzw. $L^e_\infty(\mu,X) := \mathcal{L}^e_\infty(\mu,X)/N(\mu,X)$)

- $\mathcal{L}^c_\infty(\mu,X) := \{f \in \mathcal{L}_\infty(\mu,x);$

  für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\bar{\mu}(\{s \in S;\ \|f(s)\| > \frac{1}{n}\}) < \infty\}$

  (bzw. $L^c_\infty(\mu,X) := \mathcal{L}^c_\infty(\mu,X)/N(\mu,X)$)

(1.3.3.3.) Dann ist $\mathcal{L}^c_\infty(\mu,X)$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{L}_\infty(\mu,X)$ und $\mathcal{L}^e_\infty(\mu,X)$ ist dicht in $\mathcal{L}^c_\infty(\mu,X)$.

Wenn es vor allem auf die Grundmenge S bzw. die σ-Algebra Σ ankommt, schreiben wir statt $L_1(\mu,X)$ auch $L_1(S,X)$ bzw. $L_1(\Sigma,X)$.

Ausgehend von einem positiven Maßraum (S,Σ,μ) mit seiner Vervollständigung $(S,\bar{\Sigma},\bar{\mu})$ konstruieren wir nun einen vollständigen Maßraum $(S,\tau(\mu),\tilde{\mu})$, der keine Atome $A \in \tau(\mu)$ enthält mit $\mu(A) = \infty$, aber $L_1(\tilde{\mu},X)$ ist isometrisch isomorph zu $L_1(\mu,X)$. Dies wird später von Bedeutung sein, wenn wir das duale Paar $\langle L_1(\mu,X), L_\infty(\mu,X')\rangle$ auf kanonische Weise einführen.

Σ_e ist ein Ring, und wir bilden den von Σ_e erzeugten σ-Ring $\mathfrak{U}$ mit dem äußeren Maß

$$\mu^*(A) := \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n);\quad A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, (A_n \in \Sigma_e, n \in \mathbb{N})\},\ \text{wobei}\ A \in \mathfrak{U}$$

(vgl. [15, S.64]; eine Überdeckung existiert nach [15, S.3, Prop. 4]).

Sei nun $\mathfrak{T}(\mu) := \{E \in \mathfrak{U};\ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$ für alle $A \in \mathfrak{U}\}$

bzw. $\tau(\mu) := \{E \subset S;\ A \cap E \in \mathfrak{T}(\mu)$ für alle $A \in \mathfrak{T}(\mu)\}$

(vgl. [15, S.69, Definition 3]).

Setzt man für $E \in \tau(\mu)$

$$\tilde{\mu}(E) := \sup_{\substack{A \subset E \\ A \in \mathfrak{T}(\mu)}} \mu^*(A) \text{ , so ist}$$

$(S,\tau(\mu),\tilde{\mu})$ ein vollständiger Maßraum (vgl. [15, S.70, Cor. 1; S.72, Prop. 6; S.75 Prop. 10]).

$(S,\tau(\mu),\tilde{\mu})$ besitzt nun keine Atome $E \in \tau(\mu)$ mit $\tilde{\mu}(E) = \infty$, denn nach [15, S.73, Prop. 7] ist $\tilde{\mu}(E) = \sup_{A \in \Sigma_e} \mu^*(E \cap A)$.

Wir zeigen, daß $L_1(\tilde{\mu},X) := L_1(S,\tau(\mu),\tilde{\mu},X)$ isometrisch isomorph zu $L_1(\mu,X)$ ist:

Die Menge der Elementarfunktionen $\mathcal{E}(S,\Sigma_e,\tilde{\mu},X)$ ist dicht in $L_1(\tilde{\mu},X)$ [15, S.128, Cor. zur Prop. 12] und die Abbildung

$$\begin{aligned} J : \mathcal{E}(S,\Sigma_e,\tilde{\mu},X) &\longrightarrow \mathcal{E}(S,\Sigma_e,\mu,X) \\ f &\longmapsto f \end{aligned}$$

ist aufgrund der Konstruktion des Maßes $\tilde{\mu}$ eine Isometrie.

Damit läßt sich J zu einer Isometrie $J : L_1(\tilde{\mu},X) \to L_1(\mu,X)$ aufs Bild fortsetzen. Da Bilder von Banachräumen abgeschlossen sind und $\mathcal{E}(S,\Sigma_e,\mu,X) \subset J(L_1(\mu,X))$, ist J bereits wegen der Dichtheit von $\mathcal{E}(S,\Sigma_e,\mu,X)$ in $L_1(\mu,X)$ eine Isometrie.

Wir halten noch folgende allgemeine Eigenschaft eines positiven Maßraumes fest:

(1.3.3.4.) Ein positiver Maßraum (S,Σ,μ) enthält genau dann keine Atome $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) = \infty$, wenn $L_\infty(\mu)$ sich isometrisch in $L_1(\mu)'$ auf kanonische Weise einbetten läßt.

<u>Beweis:</u> Enthält (S,Σ,μ) keine Atome $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) = \infty$, so definiere man

$$\begin{aligned} x : L_\infty(\mu) &\longrightarrow L_1(\mu)' \\ g &\longmapsto \left(f \longmapsto \int_S f\, g\, d\mu\right) \end{aligned}$$

Für $g \in L_\infty(\mu)$ und $\varepsilon > 0$ sei $A := \{s \in S;\ |g(s)| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon\}$

Dann gibt es nach Voraussetzung ein $B \in \Sigma_e \cap A$ mit $\mu(B) > 0$.

Setze $f := \frac{1}{\mu(B)} \chi_B$, und man erhält:

$$\int_S |fg|\, d\mu \geq \int_B |fg|\, d\mu \geq \frac{1}{\mu(B)} \int_B (\|g\|_\infty - \varepsilon)\, d\mu \geq \|g\|_\infty - \varepsilon$$

Somit gilt also $\|x(g)\| \geq \|g\|_\infty$. Die umgekehrte Ungleichung ist trivialerweise klar, so daß also x eine Isometrie aufs Bild ist.

Besitzt nun andererseits (S,Σ,μ) ein Atom $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) = \infty$, so gilt für $g := \chi_A$: $x(g) = 0$ nach Definition von $L_1(\mu)$, und x ist keine Isometrie, da $g \neq 0$. □

Da nur für solche Maßräume, die (1.3.3.4.) erfüllen, das duale Paar $\langle L_1(\mu,X), L_\infty(\mu,X')\rangle$ definiert ist, vereinbaren wir:

(1.3.3.5.) (S,Σ,μ) sei ein positiver Maßraum, der keine Atome $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) = \infty$ enthält.

(1.3.3.6.) Wir sagen, ein positiver Maßraum (S,Σ,μ) gemäß (1.3.3.5) ist "<u>strikt lokalisierbar</u>" (bzw. besitzt die "<u>direkte Summeneigenschaft</u>"), falls es eine Familie paarweise disjunkter Elemente $(\tilde{A}_\iota)_{\iota\in I} \subset \overline{\Sigma}_e$, $\mu(\tilde{A}_\iota) > 0$ $(\iota \in I)$ gibt, mit $S = \bigcup_{\iota\in I} \tilde{A}_\iota$ und es gilt:

i) Für alle $B \in \overline{\Sigma}_e$ gibt es eine $\overline{\mu}$-Nullmenge N und eine abzählbare Teilmenge $J \subset I$ mit $B \setminus N = \bigcup_{\iota\in J} \tilde{A}_\iota \cap B$

ii) Für $B \subset S$ ist $B \in \overline{\Sigma}$ genau dann, wenn $\tilde{A}_\iota \cap B \in \overline{\Sigma}_e$ für alle $\iota \in I$.

(vgl. [6, S.156] bzw. [15, S.179])

Eine Familie $(A_\iota)_{\iota\in I} \subset \Sigma_e$ heißt dem strikt lokalisierbaren Maßraum zugeordnet, falls es für alle $\iota \in I$ eine $\overline{\mu}$-Nullmenge $N_\iota \in \overline{\Sigma}$ gibt mit $\tilde{A}_\iota = A_\iota \cup N_\iota$.

Aus der Definition (1.3.3.6.) erhält man sofort:

(1.3.3.7.) Ist (S,Σ,μ) strikt lokalisierbar, so ist eine Abbildung $g : S \to X$ genau dann μ-meßbar, wenn für alle $\iota \in I$ $g\,\chi_{A_\iota}$ μ-meßbar ist.

(1.3.3.8.) Für einen strikt lokalisierbaren Maßraum (S,Σ,μ) gilt: Eine Menge $N \in \overline{\Sigma}$ ist genau dann eine $\overline{\mu}$-Nullmenge, wenn für alle $\iota \in I$ $\mu(\tilde{A}_\iota \cap N) = 0$ ist.

(1.3.4.) Das duale Paar $\langle L_1(\mu,X), L_\infty(\mu,X')\rangle$

Es sei (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.)

Für $f \in \mathcal{L}_1(\mu,X)$ und $g \in \mathcal{L}_\infty(\mu,X')$ ist $\langle f(\cdot),g(\cdot)\rangle : S \to \mathbb{K}$

$$s \mapsto \langle f(s),g(s)\rangle$$

μ-integrierbar [15, S.221, Cor. 2] .

Es gilt ferner:

(1.3.4.1.) $$\|f\|_1 = \sup_{\substack{\overline{g} \in \mathcal{L}^e_\infty(\mu,X') \\ \|\overline{g}\|_\infty \leq 1}} \left| \int_S \langle f(s),\overline{g}(s)\rangle \, d\mu(s)\right|$$

(1.3.4.2.) $$\|g\|_\infty = \sup_{\substack{\overline{f} \in \mathcal{L}_1(\mu,X) \\ \|\overline{f}\|_1 \leq 1}} \left| \int_S \langle \overline{f}(s),g(s)\rangle \, d\mu(s)\right|$$

Dabei gilt (1.3.4.1.), da $\mathcal{E}(S,\Sigma_e,\mu,X)$ dicht in $L_1(\mu,X)$ liegt.

(1.3.4.2.) sieht man folgendermaßen ein:

Aufgrund der Definition der Meßbarkeit von g gilt für jedes $\varepsilon > 0$ $B := \{s \in S;\ \|g(s)\| > \|g\|_\infty - \varepsilon\} \in \overline{\Sigma}$. Nun hatten wir einen Maßraum (S,Σ,μ) gemäß (1.3.3.5.) vorausgesetzt, also gibt es eine Teilmenge

$A \subset B$, $A \in \overline{\Sigma}_e$ mit $0 < \mu(A) < \infty$. Ferner haben wir $\|g\,\chi_A\|_\infty \geq \|g\|_\infty - \varepsilon$.

Nach [15, S.232, Th. 6] folgt

$$\|g\|_\infty - \varepsilon \leq \|g\,\chi_A\|_\infty = \sup_{\substack{f \in L_1(\mu,X) \\ \|f\| \leq 1}} \left| \int_S \langle f(s), g\,\chi_A(s)\rangle \, d\mu(s) \right|$$

$$\leq \sup_{\substack{f \in L_1(\mu,X) \\ \|f\| \leq 1}} \left| \int_S \langle f(s), g(s)\rangle \, d\mu(s) \right| .$$

Bildet man auf $L_1(\mu,X) \times L_\infty(\mu,X')$ die bilineare Abbildung

$$\langle \tilde{f}, \tilde{g}\rangle := \int_S \langle f(s), g(s)\rangle \, d\mu(s) \quad (f \in \tilde{f},\ g \in \tilde{g}),$$

so stellt $\langle L_1(\mu,X), L_\infty(\mu,X')\rangle$ ein duales Paar dar.

(Analog bilde man die dualen Paare $\langle L_1(\mu,X), L_\infty^c(\mu,X')\rangle$ bzw. $\langle L_1(\mu,X'), L_\infty^e(\mu,X')\rangle$)

Wir definieren

$$\sigma' := \sigma\big(L_1(\mu,X), L_\infty(\mu,X')\big) \quad \text{bzw.}$$

$$\sigma'_c := \sigma\big(L_1(\mu,X), L_\infty^c(\mu,X')\big)$$

Die Gleichung (1.3.4.2.) zeigt nun wiederum, daß für $g \in L_\infty(\mu,X')$

$$\langle \cdot, g\rangle : L_1(\mu,X) \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$f \longmapsto \langle f, g\rangle \quad \text{eine stetige lineare Abbildung darstellt.}$$

Damit ist die σ'-Topologie gröber als die schwache Topologie.

Ist nun $A \in \overline{\Sigma}_e$, so gilt aufgrund der Definition der σ'- bzw. σ'_c-Topologie:

(1.3.4.3.) Die lineare Abbildung $I_A : L_1(\mu,X) \longrightarrow X$

$$f \longmapsto \int_A f \, d\mu$$

ist σ'- (bzw. σ'_c) - $\sigma(X,X')$stetig.

Für spätere Zwecke führen wir noch folgende lineare Abbildung ein:

(1.3.4.4.) Ist $A \in \Sigma$, so seien: $R_A : L_1(\mu,X) \longrightarrow L_1(\mu_{|A},X)$

$$f \longmapsto f_{|A}$$

$$\tilde{R}_A : L_\infty(\mu,X') \longrightarrow L_\infty(\mu_{|A},X')$$

$$g \longmapsto g_{|A}$$

$$e_A : L_1(\mu_{|A},X) \longrightarrow L_1(\mu,X)$$
$$f \longmapsto \tilde{f} \qquad \text{wobei}$$
$$\tilde{f}(s) := \begin{cases} f(s) & \text{für } s \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\tilde{e}_A : L_\infty(\mu_{|A},X') \longrightarrow L_\infty(\mu,X')$$
$$g \longmapsto \tilde{g} \qquad \text{mit}$$
$$\tilde{g}(s) := \begin{cases} g(s) & \text{für } s \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Es gilt nach Definition für $f \in L_1(\mu,X)$ und $g \in L_\infty(\mu_{|A},X')$:

$\langle R_A f,g\rangle = \langle f,\tilde{e}_A g\rangle$ bzw.

$\langle e_A f,g\rangle = \langle f,\tilde{R}_A g\rangle$ falls $f \in L_1(\mu_{|A},X)$ und $g \in L_\infty(\mu,X')$.

Wir setzen für $A \in \Sigma$: $\sigma'_A := \sigma\big(L_1(\mu_{|A},X),L_\infty(\mu_{|A},X')\big)$.

Für einen Teilraum $L \subset L_1(\mu,X)$ definieren wir:

(1.3.4.5.) $L^\times := L_\infty(\mu,X')/L^\circ$, wobei L° die Polare von L im Dualsystem $\langle L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X)\rangle$ darstellt. Nun ist $L_\infty(\mu,X') \subset L_1(\mu,X)'$ abgeschlossen (siehe (1.3.4.2.) und beachte, daß $\big(L_\infty(\mu,X'),\|\cdot\|_\infty\big)$ ein Banachraum ist), so daß $L^\times$ einen Banachraum darstellt. $\langle L,L^\times\rangle$ bildet erneut ein duales Paar, für $\sigma'_L := \sigma(L,L^\times)$ ist $\sigma_L = \sigma' \cap L$, und (L,σ'_L) ist ein Teilraum von $\big(L_1(\mu,X),\sigma'\big)$ (vgl. [31, S.163]).

Wir geben nun noch einige Folgerungen zu den Aussagen (1.3.4.1.) bzw. (1.3.4.2.) für einen Maßraum gemäß (1.3.3.5.) an. Dabei bezeichne "°" die Polare im Dualsystem $\langle L_1(\mu,X),L_1(\mu,X)'\rangle$.

Wegen (1.3.4.2.) wissen wir, daß $L_\infty(\mu,X') \hookrightarrow L_1(\mu,X)'$ isometrisch einbettbar ist, und deshalb $B(L_1(\mu,X)) = B(L_\infty^e(\mu,X'))^\circ = B(L_\infty^c(\mu,X'))^\circ = B(L_\infty(\mu,X'))^\circ$ gilt. Mit dem Bipolarensatz folgt dann

$$B(L_1(\mu,X)') = B(L_1(\mu,X))^\circ = B(L_\infty^e(\mu,X'))^{\circ\circ} = B(L_\infty(\mu,X'))^{\overline{\sigma(L_1(\mu,X)',L_1(\mu,X))}}$$

Dies bedeutet :

(1.3.4.6.) $B(L_\infty^e(\mu,X'))$ [und damit auch $B(L_\infty^c(\mu,X'))$ bzw. $B(L_\infty(\mu,X'))$] liegt $\sigma(L_1(\mu,X)',L_1(\mu,X))$ - dicht in $B(L_1(\mu,X)')$.

(1.3.4.7.) Aus (1.3.4.2.) und (1.3.4.6.) ergibt sich, daß die $\|\cdot\|_1$ - Topologie gleich der starken Topologie $\beta(L_1(\mu,X),L_\infty^e(\mu,X')) = \beta(L_1(\mu,X),L_\infty^c(\mu,X')) = \beta(L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X'))$ ist
[zum Begriff der starken Topologie vgl. [36,S.258,§21,2]].

Da $(L_\infty(\mu,X'),\|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist, folgt mit (1.3.4.1.) und dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, daß jede $\sigma(L_1(\mu,X),L_\infty^c(\mu,X'))$ - beschränkte Teilmenge $\|\cdot\|_1$- beschränkt ist. Damit ist die Topologie $\beta^*(L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X'))$ der gleichmäßigen Konvergenz auf den stark beschränkten Teilmengen in $L_\infty(\mu,X')$ gleich der $\|\cdot\|_1$- Topologie, und wir erhalten mit (1.3.4.7.) sowie [36, S.259, §21,2(2) bzw. S.264 §21,5(3)] für die Mackey-Topologie:

(1.3.4.8.) $\tau(L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X'))$ quasitonneliert $\Longleftrightarrow$
$\tau(L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X')) = \|\cdot\|_1 \Longleftrightarrow \tau(L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X'))$ ist metrisierbar
[die gleiche Aussage gilt für $\tau(L_1(\mu,X),L_\infty^c(\mu,X'))$].

(1.3.4.9.) Insbesondere ist $(L_1(\mu,X),\sigma')$ nicht linear homöomorph zu einem Banachraum versehen mit seiner schwachen Topologie, falls X' nicht die RNP bezüglich (S,Σ,μ) besitzt.

Die beiden letzten Aussagen werden wir in 2.2. alternativ herleiten.

(1.3.5.) Erwartungswertoperator

Wir gehen noch kurz auf den bedingten Erwartungswertoperator für endliche Maßräume (S,Σ,μ) ein:

Ist $\mathcal{B} \subset \Sigma$ eine Teil-σ-Algebra, so sei

$$\mathbf{E}_{\mathcal{B}}^{X} : L_1(\mu,X) \to L_1(S,\mathcal{B},\mu_{|\mathcal{B}},X)$$

der bedingte Erwartungswertoperator (vgl.[14, S.121, Def.1; S.123, Th.4]). Wenn es keine Verwechslungen über den zugrundeliegenden Banachraum geben kann, schreiben wir statt $\mathbf{E}_{\mathcal{B}}^{X}$ kurz $\mathbf{E}_{\mathcal{B}}$.

(1.3.5.1.) Für jede Teil-σ-Algebra $\mathcal{B} \subset \Sigma$ ist $\mathbf{E}_{\mathcal{B}}$ σ'-σ'-stetig (vgl. [28, S.16, 1.1.1]).

(1.3.5.2.) Ist (S,Σ,μ) ein separabler und endlicher Maßraum, dann gibt es eine aufsteigende Folge von endlichen Σ-Zerlegungen $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß die von $\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} \pi_n$ erzeugte Algebra bezüglich der Halbmetrik $d\mu$ dicht in Σ liegt (vgl. (1.3.1.11.)).
Dann gilt $f \in L_1(\mu,X)$ genau dann, wenn $f \in L_1(S,\sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_n),\mu,X)$.
Setzt man $\mathbf{E}_{\pi_n} := \mathbf{E}_{\sigma(\pi_n)}$, so gilt nach [14, S.125, Th. 1] für $f \in L_1(\mu,X)$: $\lim_{n\to\infty} \|f - \mathbf{E}_{\pi_n} f\|_1 = 0$.

(1.3.5.3.) Sind (S,Σ,μ) ein endlicher, positiver Maßraum, m eine überabzählbare Kardinalzahl, λ die erste Ordinalzahl der Kardinalität und $(\Sigma_\alpha)_{\omega\leq\alpha<\lambda}$ eine verallgemeinerte Folge von Teil-σ-Algebren, so gibt es zu jedem $f \in L_1(\mu,X)$ ein $\beta \in [\omega,\lambda[$ mit $\mathbf{E}_{\Sigma_\beta} f = f$.

<u>Beweis:</u> Für jedes $f \in L_1(\mu,X)$ bildet $(\mathbb{E}_\alpha f, \Sigma_\alpha)_{\omega\leq\alpha<\lambda}$ ein Martingal. Nun gilt nach Definition der "verallgemeinerten Folge" $\Sigma = \sigma(\bigcup_{\alpha<\lambda} \Sigma_\alpha)$. Wendet man einen Martingalkonvergenzsatz an [14, S.125, Th. 1], so hat man:

$\lim_{\alpha<\lambda} \|\mathbb{E}_{\Sigma_\alpha} f - f\|_1 = 0.$

Damit findet man eine aufsteigende Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [\omega,\lambda[$ mit

$\|\mathbb{E}_{\Sigma_{\alpha_n}} f - f\|_1 < \frac{1}{n}.$

Setzt man $\beta := \lim_{n\to\infty} \alpha_n$, so folgt $\beta < \lambda$ und $\Sigma_\beta = \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_{\alpha_n})$ (β ist eine Limeszahl). Der oben zitierte Martingalkonvergenzsatz liefert $\mathbb{E}_{\Sigma_\beta} f = f$.

(1.3.5.4.) Für einen endlichen, positiven Maßraum (S,Σ,μ) und eine endliche Σ-Zerlegung π_n gilt: $\|\mathbb{E}_{\pi_n} g\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ für $g \in L_\infty(\mu,X')$ (vgl. [14, S.67, Lemma 1]).

(1.3.5.5.) Sind (S,Σ,μ) ein positiver, endlicher Maßraum und π eine endliche Σ-Zerlegung, so ist $\mathbb{E}_\pi^*(L_1(\mu,X)') \subset L_\infty(\mu,X')$, wobei $\mathbb{E}_\pi^*$ den zu $\mathbb{E}_\pi$ adjungierten Operator darstellt.

<u>Beweis:</u> Es sei $G \in L_1(\mu,X)'$. Wir können G als w*-meßbare und μ - wesentlich beschränkte Funktion $G: S \to X'$ identifizieren (vgl.[29,S.94-95, Th.7]). Dann folgt für $f \in L_1(\mu,X)$:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbb{E}_\pi f, G\rangle &= \langle \sum_{A\in\pi} \left(\frac{1}{\mu(A)} I_A(f)\chi_A\right), G\rangle \\
&= \sum_{A\in\pi} \frac{1}{\mu(A)} \langle I_A(f)\chi_A, G\rangle \\
&= \sum_{A\in\pi} \frac{1}{\mu(A)} \langle I_A(f), \int_A G\, d\mu\rangle
\end{aligned}$$

(wobei $\int_A G\, d\mu \in X'$ das Gelfandintegral ist (vgl. [14, S.53]))

$$= \sum_{A\in\pi} \langle I_A(f), \frac{1}{\mu(A)} \int_A G\, d\mu\rangle$$

$$= \sum_{A\in\pi} \langle f, \frac{1}{\mu(A)} \int_A G \, d\mu \, \chi_A \rangle$$

$$= \langle f, \sum_{A\in\pi} \left(\frac{1}{\mu(A)} \int_A G \, d\mu \, \chi_A\right) \rangle$$

Setzt man $g := \sum_{A\in\pi} \left(\frac{1}{\mu(A)} \int_A G \, d\mu \, \chi_A\right)$, so ist $g \in L_\infty(\mu,X')$, und man hat insgesamt $\mathbb{E}_\pi^\star(L_1(\mu,X)') \subset L_\infty(\mu,X')$. □

(1.3.6.) Dichtetyp und σ'-abgeschlossene Teilräume in $L_1(\mu,X)$

(1.3.6.1) Ist (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.) und ist $X_0 \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum, dann ist $L_1(\mu,X_0) \subset L_1(\mu,X)$ σ'-abgeschlossen.

Beweis: Es sei $(f_\iota)_{\iota\in I} \subset L_1(\mu,X_0)$ und $f \in L_1(\mu,X)$ mit $f_\iota \xrightarrow[\sigma']{\iota\in I} f$. Dann gilt für alle $A \in \Sigma_e$ wegen der σ'-$\sigma(X,X')$-Stetigkeit von $I_A : I_A(f_\iota) \xrightarrow[\sigma(X,X')]{\iota\in I} I_A(f) \in X_0$ (da X_0 abgeschlossen ist). Damit hat man insbesondere für alle $A \in \Sigma_e$ $R_A f \in L_1(\mu_{|A},X_0)$ (vgl. (1.3.4.4.)). Wendet man (1.3.3.1.) an und beachtet, daß $L_1(\mu,X_0)$ in $L_1(\mu,X)$ $\|\cdot\|_1$-abgeschlossen ist, so erhält man die Aussage. □

(1.3.6.2.) Ist (S,Σ,μ) ein Maßraum gemäß (1.3.3.5.) und $\Sigma_0 \subset \Sigma$ eine Teil-σ-Algebra, dann ist $L_1(S,\Sigma_0,\mu_{|\Sigma_0},X) \subset L_1(\mu,X)$ σ'-abgeschlossen.

Beweis: Wir wählen ein Netz $(f_\iota)_{\iota\in I} \subset L_1(S,\Sigma_0,\mu_{|\Sigma_0},X)$ und $f \in L_1(\mu,X)$ mit $f_\iota \xrightarrow[\sigma']{\iota\in I} f$.

Es ist $\langle f(\cdot),x' \rangle$ für alle $x' \in X'$ $\mu|_{\Sigma_0}$-meßbar, denn nach [15, S.93, Prop. 12] ist für alle $\iota \in I$ $\langle f_\iota(\cdot),x' \rangle$ $\mu_{|\Sigma_0}$-meßbar und

$\langle f_\iota, x'g\rangle \xrightarrow[\iota\in I]{} \langle f, x'g\rangle$ für alle $g \in L_\infty(\mu)$ nach Voraussetzung.

Da $L_1(\mu_{|\Sigma_0}) \subset L_1(\mu)$ abgeschlossen ist, folgt die $\mu_{|\Sigma_0}$-Meßbarkeit von $\langle f(\cdot), x'\rangle$ für $x' \in X'$. Damit ist die Bedingung (1) in [15, S.93, Prop. 12] erfüllt, und wir haben ebenfalls mit [15, S.93, Prop. 12] die $\mu_{|\Sigma_0}$-Meßbarkeit von f ("(2)" ergibt sich in [15, S.93, Prop. 12] wegen $f \in L_1(\mu, X)$). □

(1.3.6.3.) Es seien (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.) und $C \subset L_1(\mu,X)$ σ'-separabel.

Dann gibt es einen separablen abgeschlossenen Teilraum $X_0 \subset X$, ein $A \in \Sigma$ und eine separable Teil-σ-Algebra $\Sigma_0 \subset \Sigma \cap A$, so daß $(A,\Sigma_0,\mu_{|\Sigma_0})$ σ-finit ist und es gilt:

i) $R_{S\setminus A} f = 0$ für $f \in C$.

ii) $R_A f \in L_1(A,\Sigma_0,\mu_{|\Sigma_0},X_0)$.

<u>Beweis:</u> Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ mit $C \subset \{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}^{-\sigma'}$. Dann gibt es nach (1.3.3.1.) ein $A \in \Sigma$, so daß $(A,\Sigma \cap A,\mu_{|\Sigma\cap A})$ σ-finit ist, sowie für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $R_{S\setminus A}(f_n) = 0$.

Damit gilt aber für $f \in C$: Ist $(f_\iota)_{\iota\in I} \subset \{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ ein Netz mit $f_\iota \xrightarrow{\iota\in I} f$ in $(L_1(\mu,X),\sigma')$, so ist insbesondere für alle $g \in L_\infty(\mu,X')$ mit $\tilde{R}_A\, g = 0$ $\quad 0 = \langle f_\iota, g\rangle \xrightarrow{\iota\in I} \langle f, g\rangle$.

Also hat man für $B \in \Sigma \cap (S\setminus A)$: $R_B f = 0$, denn $L_\infty(\mu_{|B},X)$ ist total auf $L_1(\mu_{|B},X)$.

Wiederum mit (1.3.3.1.) findet man einen separablen abgeschlossenen Teilraum $X_0 \subset X$ mit $f_n \in L_1(\mu,X_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach (1.3.6.1) ist $L_1(\mu,X_0) \subset L_1(\mu,X)$ σ'-abgeschlossen und damit ist $C \subset L_1(\mu,X_0)$.

Ebenfalls mit (1.3.3.1.) gibt es eine separable Teil-σ-Algebra $\Sigma_0 \in \Sigma \cap A$

derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ $R_A f_n \in L_1(A,\Sigma_0,\mu_{|\Sigma_0},X_0)$. Da R_A σ'-σ'_A stetig ist und $L_1(A,\Sigma_0,\mu_{|\Sigma_0},X_0) \subset L_1(\mu_{|A},X_0)$ σ'-abgeschlossen ist (vgl. (1.3.6.2.)), gilt $R_A f \in L_1(A,\Sigma_0,\mu_{|\Sigma_0},X)$ für alle $f \in C$. Ist $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ mit $A_k \in \Sigma_e$ $(k \in \mathbb{N})$, so kann man o.E. $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (\Sigma_0)_e$ annnehmen, und $(A,\Sigma_0,\mu_{|\Sigma_0})$ ist σ-finit. □

(1.3.6.4.) Ist (S,Σ,μ) ein endlicher, separabler und positiver Maßraum und ist Y ein Banachraum mit Dichtetyp $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$, so hat auch $L_1(\mu,Y)$ den $\|\cdot\|_1$-Dichtetyp $\mathfrak{m}$.

<u>Beweis:</u> Da $Y \subset L_1(\mu,Y)$ isometrisch einbettbar ist, hat $L_1(\mu,Y)$ einen Dichtetyp $\geq \mathfrak{m}$.
Es sei nun $D \subset Y$ eine dichte Teilmenge und $\{A_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \Sigma$ ebenfalls dicht bezüglich der Halbmetrik $d\mu$ in Σ.
Dann besitzt $\{x\,\chi_{A_n};\ x \in D;\ n \in \mathbb{N}\}$ die Kardinalität von D und ist dicht in $\{x\,\chi_A;\ x \in D,\ A \in \Sigma\}$. D liegt dicht in Y, so daß wegen (1.3.3.1.) $\operatorname{span}\{x\chi_{A_n};\ x \in D,\ n \in \mathbb{N}\} \subset L_1(\mu,X)$ dicht ist. Damit gibt es eine dichte Teilmenge $\tilde{D} \subset L_1(\mu,X)$ mit der Kardinalität von D, und der Dichtetyp von $L_1(\mu,X)$ ist ebenfalls $\mathfrak{m}$. □

(1.3.7.) Isometrische Darstellung von $L_1(\mu)$-Räumen

Im 3. Paragraphen benötigen wir, um ein Renormierungskriterium herleiten zu können, für endliche Maßräume eine Darstellung von $L_1(\mu,X)$ mittels einer direkten Summe von $L_1(R,\Theta,\nu,X)$-Räumen, wobei die Struktur der Maßräume (R,Θ,ν) einfacher zu untersuchen ist. Dazu betrachten wir eine isometrische Darstellung von $L_1(\mu)$, wie sie in [37, S.127 Th. 9] in ähnlicher Form gegeben wird und die Maßalgebraisomorphie von

Maharam benutzt. Der Begriff der (booleschen) Maßalgebra wird z.B. in [37, S.120] eingeführt.

Wir legen nun für eine unendliche Ordinalzahl α folgende Bezeichnung fest:

(1.3.7.1.) Für $\alpha \geq \omega$ setze man

$D_\alpha := \prod_{\beta<\alpha} \{0,1\}$, $Q_\alpha := \bigotimes_{\beta<\alpha} \mathrm{Pot}(\{0,1\})$ und $\nu_\alpha := \bigotimes_{\beta<\alpha} \nu$, wobei ν das Maß $\nu(\{0\}) = \nu(\{1\}) = \frac{1}{2}$ auf $\{0,1\}$ bezeichnet.

Zur Vereinfachung sei mit (Q_α,ν_α) auch die Maßalgebra benannt, Maßraum $(D_\alpha,Q_\alpha,\nu_\alpha)$ zugeordnet ist (vgl. [37, S.121]). Schließlich definieren wir entsprechend für eine unendliche Teilmenge $\Gamma \subset [0,\alpha[$:

$D_\Gamma := \prod_{\beta\in\Gamma} \{0,1\}$, $Q_\Gamma := \bigotimes_{\beta\in\Gamma} \mathrm{Pot}\{0,1\}$ und $\nu_\Gamma := \bigotimes_{\beta\in\Gamma} \nu$.

(1.3.7.2.) Für einen positiven endlichen Maßraum (S,Σ,μ) $(\mu(S) > 0)$ ist $(S,\Sigma,\tilde{\mu})$ mit $\tilde{\mu} := \frac{\mu}{\mu(s)}$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.
Die Abbildung

$$W : L_1(\mu) \to L_1(\tilde{\mu})$$
$$f \mapsto \mu(s)\, f \quad \text{stellt eine Isometrie dar.}$$

(1.3.7.3.) Es sei (S,Σ,μ) ein positiver endlicher Maßraum, dann gibt es abzählbare Mengen I_1,I_2 mit $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, unendliche Kardinalzahlen $\mathfrak{m}_i$ $(i \in I_2)$ und eine Isometrie

$$\tilde{T} : L_1(\mu) \to \left(\ell_1(I_1) \oplus \left(\bigoplus_{i\in I_2} L_1(D_{\lambda_i},Q_{\lambda_i},\nu_{\lambda_i})\right)_{\ell_1(I_2)}\right)_{\ell_1}$$

$(\lambda_i$ die erste Ordinalzahl der Kardinalität $\mathfrak{m}_i$ $(i \in I_2))$ mit den Eigenschaften:

i) Es gibt eine Folge paarweise disjunkter Elemente $(A_i)_{i\in I_1 \cup I_2} \subset \Sigma$ mit:

a) Für alle $i \in I_1$ ist A_i ein Atom, und es gilt für $f \in L_1(\mu)$

$pr_i\,(\tilde{T}f) = \mu(A_i)\, r_i$, wobei $f\,\chi_{A_i} = r_i\,\chi_{A_i}$.

b) Für alle $i,j \in I_2$ gilt: Setzt man $K_i := \mu(A_i)\mu(\bigcup_{k\in I_2} A_k)$,

so ist $pr_i\,(\tilde{T}\,\chi_{A_j}) = \delta_{ij}\, K_i\, \chi_{D_{\lambda_i}}$ und für $f \in L_1(\mu)$

$pr_i\,(\tilde{T}f) = pr_i\,\big(\tilde{T}(f\,\chi_{A_i})\big)$. ($\delta_{ij}$ ist das Kronecker-Symbol).

ii) Für alle $i \in I_2$ und $B^1, B^2 \in Q_{\lambda_i}$, $B^1 \cap B^2 = \emptyset$ gibt es

$A^1, A^2 \in \Sigma \cap A_i$ mit $pr_i\,(\tilde{T}\,\chi_{A^j}) = K_i\,\chi_{B^j}$ $(j = 1,2)$ und

$A^1 \cap A^2 = \emptyset$ (K_i aus i) b)).

iii) Sind für $i \in I_2$ $A^j \subset \Sigma \cap A_i$ $(j = 1,2)$ mit $A^1 \cap A^2 = \emptyset$,

so gilt $pr_i\,(\tilde{T}\,\chi_{A^1})\, pr_i\,(\tilde{T}\,\chi_{A^2}) = 0$.

v) Definiert man für $i \in I_2$

$$\tilde{T}_i : L_1(\mu_{|A_i}) \longrightarrow L_1(D_{\lambda_i}, Q_{\lambda_i}, \nu_{\lambda_i})$$
$$f \longmapsto pr_i\,\big(\tilde{T}(e_{A_i}\, f)\big)$$

so gilt:

a) $\tilde{T}_i$ ist eine Isometrie

b) Setzt man $L_1^i := \{\chi_A;\ A \in \Sigma \cap A_i\}$ und

$L_2^i := \{K_i\,\chi_B,\ B \in Q_{\lambda_i}\}$ (K_i aus i) b)),

so ist $\tilde{T}_i(L_1^i) = L_2^i$

Man hat für $A^1, A^2 \in \Sigma \cap A_i$: $\tilde{T}_i(\chi_{A^1}\,\chi_{A^2}) = K_i^{-1}\,\tilde{T}_i(\chi_{A^1})\tilde{T}_i(\chi_{A^2})$

c) Für $B \in Q_{\lambda_i}$ folgt: $\tilde{T}^*(\chi_B\, e_i) = e_{A_i}\,\big(K_i\,\tilde{T}_i^{-1}(\chi_B)\big)$.

<u>Beweis:</u> Nach (1.3.1.10.) gibt es eine abzählbare Menge I_1 und eine Folge $(A_i)_{i\in I_1}$ paarweise disjunkter Atome, so daß für $S' := S \setminus \bigcup_{i\in I_1} A_i$ $(S',\Sigma',\mu') := (S',\Sigma \cap S',\mu_{|\Sigma \cap S'})$ atomlos ist.

Wir definieren dann

$$K : L_1(\mu) \to \left(\ell_1(I_1) \oplus L_1(\mu')\right)_{\ell_1}$$
$$f \mapsto \left((R_{A_i} f)_{i\in I_1}, R_{S'}(f)\right)$$

Aufgrund der Wahl der Folge $(A_i)_{i\in I_1}$ ist K eine Isometrie.

Wir betrachten nun den positiven Maßraum $(S',\Sigma',\tilde{\mu})$, wobei $\tilde{\mu} := \frac{\mu'}{\mu'(S')}$ gesetzt ist (falls $\mu(S') = 0$, ist (S,Σ,μ) rein atomar). Hierzu sei $(\mathbb{A},\tilde{\mu})$ die zugehörige Maßalgebra (vgl. [37, S.120]). Nach [37, S.122, Th. 7] gilt für eine Maßalgebra ohne Atome:

Es gibt eine abzählbare Menge $([A_i])_{i\in I_2} \subset \mathbb{A}$ mit

(1) $\bigvee_{i\in I} [A_i] = [S]$ und $[A_{i_1}] \wedge [A_{i_2}] = [\emptyset]$ für $i_1,i_2 \in I$, $i_1 \neq i_2$,

so daß die Maßalgebra $[A_i] \cap \mathbb{A}$ für alle $i \in I_2$ homogen ist (vgl. [37, S.122] zum Begriff "homogen").

Da die Menge I_2 abzählbar ist, können wir die Repräsentanten $(A_i)_{i\in I_2} \subset \Sigma'$ der Äquivalenzklassen $([A_i])_{i\in I_2}$ paarweise disjunkt wählen ($\mu(A_i) > 0$ für $i \in I_2$).

Wenn man nun zu dem Maßraum $(A_i,\Sigma \cap A_i,\tilde{\mu}_i)$ mit $\tilde{\mu}_i := \frac{\tilde{\mu}}{\mu(A_i)}$ übergeht und mit $(\mathbb{A}_i,\tilde{\mu}_i)$ die zugehörige Maßalgebra bezeichnet, so ist $(\mathbb{A}_i,\tilde{\mu}_i)$ maßisomorph zu einem $(Q_{\lambda_i},\nu_{\lambda_i})$ ($\lambda_i \geq \omega$ die erste Ordinalzahl der Kardinalität von λ_i) gemäß einem Theorem von D. Maharam (vgl. [37, S.122, Th. 8]).

Für $i \in I_2$ betrachten wir den Maßisomorphismus

(2) $M_i : (\mathbb{A}_i,\tilde{\mu}_i) \to (Q_{\lambda_i},\nu_{\lambda_i})$

und definieren

$$\tilde{J}_i \;:\; \mathcal{E}(A_i, A_i \cap \Sigma, \tilde{\mu}_i) \longrightarrow L_1(D_{\lambda_i}, Q_{\lambda_i}, \nu_{\lambda_i})$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j \chi_{B_j} \longmapsto \sum_{j=1}^{n} r_j \chi_{M_i([B_j])^{\sim}}$$

wobei für $1 \leq k, j \leq n$ $B_k \cap B_j = \emptyset$ falls $k \neq j$, und $M_i([B_j])^{\sim}$ einen Repräsentanten der Restklasse $M_i([B_j])$ darstellt.

Nach Definition der Maßalgebra ist die Definition von $\tilde{J}_i$ von der Wahl der Repräsentanten unabhängig und $\tilde{J}_i$ ist wohldefiniert.

Für $i \in I_2$ und $f = \sum_{j=1}^{n} r_j \chi_{B_j}$, $B_j \in \Sigma \cap A_i$, $B_k \cap B_j = \emptyset, j \neq k, 1 \leq j, k \leq n$, kann man die Repräsentanten $M_i([B_j])^{\sim}$ der Restklasse $M_i([B_j])$ paarweise disjunkt wählen. Damit gilt

$$\|\tilde{J}_i(f)\| = \sum_{j=1}^{n} |r_j| \, \nu_{\lambda_i}(M_i([B_j])^{\sim}) = \sum_{j=1}^{n} |r_j| \, \mu_i(B_j) = \|f\|_1$$

und $\tilde{J}_i$ ist eine Isometrie aufs Bild. Da M_i eine Maßisomorphie darstellt, muß auch $\tilde{J}_i : \mathcal{E}(A_i, \Sigma \cap A_i, \tilde{\mu}_i) \to \mathcal{E}(D_{\lambda_i}, Q_{\lambda_i}, \nu_{\lambda_i})$ eine Isometrie sein.

Weil $\mathcal{E}(A_i, \Sigma \cap A_i, \tilde{\mu}_i)$ dicht in $L_1(A_i, \Sigma \cap A_i, \tilde{\mu}_i)$ liegt, läßt sich $\tilde{J}_i$ zu einer Isometrie aufs Bild

$$J_i \;:\; L_1(A_i, \Sigma \cap A_i, \tilde{\mu}_i) \to L_1(D_{\lambda_i}, Q_{\lambda_i}, \nu_{\lambda_i})$$

fortsetzen, die aber, da Bilder von Banachräumen unter Isometrien abgeschlossen sind, auch eine Isometrie ist.

Wir führen nun gemäß (1.3.7.2.) folgende Isometrien ein:

$$W \;:\; L_1(S', \Sigma', \mu') \longrightarrow L_1(S', \Sigma', \tilde{\mu}) \qquad \text{bzw. für } i \in I$$

$$W_i \;:\; L_1(A_i, \Sigma \cap A_i, \tilde{\mu}_{|A_i}) \longrightarrow L_1(A_i, \Sigma \cap A_i, \tilde{\mu}_i)$$

Dann läßt sich mit dem Einschränkungsoperator

$$R^{\tilde{\mu}}_{A_i} \;:\; L_1(S', \Sigma', \tilde{\mu}) \longrightarrow L_1(A_i, \Sigma \cap A_i, \tilde{\mu}_{|A_i}) \qquad \text{(vgl. (1.3.4.4.))}$$

folgende Isometrie definieren

$$\tilde{T} : L_1(\mu) \longrightarrow \Big[\ell_1(I_1) \oplus \big(\bigoplus_{i\in I_2} L_1(D_{\lambda_i}, Q_{\lambda_i}, \nu_{\lambda_i})\big)_{\ell_1(I_2)}\Big]_{\ell_1}$$

$$\tilde{T}(f) := \Big[\big(R_{A_i}(f)\big)_{i\in I_1}, \big((J_i \circ W_i \circ R^{\tilde{\mu}}_{A_i} \circ W \circ R_{S'})(f)\big)_{i\in I_2}\Big]$$

(Dabei beachte man, daß die Abbildung

$$J : L_1(S', \Sigma', \tilde{\mu}) \longrightarrow \big(\bigoplus_{i\in I_2} L_1(A_i, \Sigma', \tilde{\mu}_{|A_i})\big)_{\ell_1}$$

$$f \longmapsto \big((R^{\tilde{\mu}}_{A_i})(f)\big)_{i\in I_2}$$

wegen (1) eine Isometrie ist).

Wir prüfen nun i) - iv) nach:

i) a) ergibt sich sogleich aus der Definition der Abbildung K.

b) Für $i,j \in I_2$ gilt

$$\begin{aligned} pr_i\,(\tilde{T}\,\chi_{A_j}) &= (J_i \circ W_i \circ R^{\tilde{\mu}}_{A_i} \circ W \circ R_{S'})(\chi_{A_j}) \\ &= \mu(S')(J_i \circ W_i \circ R^{\tilde{\mu}}_{A_i})(\chi_{A_j}) \\ &= \mu(S')\,\delta_{ij}\,\mu(A_i)\,J_i\,(\chi_{A_j}) \\ &= K_i\,\delta_{ij}\,\chi_{(M_i[A_i])^\sim} = K_i\,\delta_{ij}\,\chi_{Q_{\lambda_i}} . \end{aligned}$$

Ist zusätzlich $f \in L_1(\mu)$, so hat man

$$\begin{aligned} pr_i\,(\tilde{T}\,f) &= (J_i \circ W_i \circ R^{\tilde{\mu}}_{A_i} \circ W \circ R_{S'})(f) \\ &= \mu(S')(J_i \circ W_i \circ R^{\tilde{\mu}}_{A_i})(f) \\ &= \mu(S')\,\mu\,(A_i)\,J_i\,(R^{\tilde{\mu}}_{A_i}\,f) \\ &= \mu(S')\,\mu\,(A_i)\,J_i\,(R^{\tilde{\mu}}_{A}\,(f\,\chi_{A_i})) \\ &= (J_i \circ W_i \circ R^{\tilde{\mu}}_{A_i} \circ W \circ R_{S'})(f\,\chi_{A_i}) \\ &= pr_i\,(\tilde{T}(f\,\chi_{A_i})) \end{aligned}$$

ii) Sind $B^1, B^2 \in Q_{\lambda_i}$ für ein $i \in I_2$ mit $B^1 \cap B^2 = \emptyset$, so gibt es nach (2) $\tilde{A}^1, \tilde{A}^2 \in \Sigma \cap A_i$ mit $M_i([\tilde{A}^j]) = [B^j]$ $(j = 1,2)$, $M_i([\tilde{A}^1] \wedge [\tilde{A}^2]) = M_i([\tilde{A}^1]) \wedge M_i([\tilde{A}^2])$

$$= [B^1] \wedge [B^2] = 0$$

Da M_i eine Isometrie ist, gilt $[\tilde{A}^1] \wedge [\tilde{A}^2] = 0$.

Also findet man für $j = 1,2$ $A^j \in [\tilde{A}^j]$ mit $A^1 \cap A^2 = \emptyset$ und man hat $pr_i\,(\tilde{T}\,\chi_{A^j}) = (J_i \circ W_i \circ R^{\mu}_{A_i} \circ W \circ R_{S'})(\chi_{A^j})$

$$= \mu(S')\mu(A_i)\,\chi_{B^j} = K_i\,\chi_{B^j} .$$

iii) Für $i \in I_2$ und $A^1, A^2 \in \Sigma \cap A_i$, $A^1 \cap A^2 = \emptyset$ gilt nach (2)

$0 = M\,([A^1] \wedge [A^2]) = M_i([A^1]) \wedge M_i([A^2])$.

Nach Definition von $\tilde{T}$ hat man dann:

$pr_i\,(\tilde{T}(\chi_{A^1}))\; pr_i\,(\tilde{T}(\chi_{A^2})) =$

$$(J_i \circ W_i \circ R^{\tilde{\mu}}_{A_i} \circ W \circ R_{S'})(\chi_{A^1})(J_i \circ W_i \circ R^{\tilde{\mu}}_{A_i} \circ W \circ R_{S'})(\chi_{A^2}) =$$

$$K_i^2\,\chi_{M_i([A^1])^\sim}\,\chi_{M_i([A^2])^\sim} = 0 .$$

iv) a) ergibt sich sofort aus der Isometrie $\tilde{T}$ und i) b).

b) Aufgrund der Definition von $\tilde{T}$ gibt es für $A \in \Sigma \cap A_i$ ein $B \in Q_{\lambda_i}$ mit $\tilde{T}(e_{A_i}(\chi_A)) = (J_i \circ W_i \circ R^{\tilde{\mu}}_{A_i} \circ W \circ R_{S'})(\chi_A) = K_i\,\chi_B\,e_i$.

Also gilt:

$\tilde{T}_i(\chi_A) = pr_i\,(\tilde{T}(e_{A_i}(\chi_A))) = K_i\,pr_i\,(\chi_B\,e_i) = K_i\,\chi_B$.

Ebenso findet man nach (2) zu $B \in Q_{\lambda_i}$ ein $A \in \Sigma \cap A_i$ mit $M_i([A]) = [B]$. Mit der Definition von $\tilde{T}$ gilt dann $\tilde{T}_i(\chi_A) = K_i\,\chi_B$. Ist nun $A^1, A^2 \in \Sigma \cap A_i$, so folgt:

$$\tilde{T}_i(\chi_{A^1 \cap A^2}) = \tilde{T}_i(\chi_{A^1}\,\chi_{A^2}) = pr_i\,\left[\tilde{T}(e_{A_i}(\chi_{A^1}\chi_{A^2}))\right]$$

$$= (J_i \circ W_i \circ R^{\tilde{\mu}}_{A_i} \circ W \circ R_{S'})(e_{A_i}(\chi_{A^1}\ \chi_{A^2}))$$

$$= \mu(S')\mu(A_i)\ J_i\ (\chi_{A^1}\ \chi_{A^2})$$

$$= \mu(S')\mu(A_i)\ \chi_{(M_i[A^1 \cap A^2])^\sim}$$

$$= \mu(S')\mu(A_i)\ \chi_{(M_i[A^1] \wedge M_i[A^2])^\sim}$$

$$= K_i^{-1}(K_i\ J_i(\chi_{A^1})\ K_i\ J_i(\chi_{A^2})) = K_i^{-1}\ \tilde{T}_i(\chi_{A^1})\tilde{T}_i(\chi_{A^2}).$$

c) Es seien $i \in I_2$ und $B \in Q_{\lambda_i}$. Man wähle ein $A \in \Sigma \cap A_i$ mit $\tilde{T}(e_{A_i}(\chi_A)) = \chi_B\ e_i$ (vgl. i) b)). Wir haben

(3) $\tilde{T}_i^{-1}(\chi_B) = R_{A_i}(\tilde{T}^{-1}(\chi_B\ e_i))$, <u>denn:</u>

$$\tilde{T}_i\ (R_{A_i}(\tilde{T}^{-1}(\chi_B\ e_i))) = pr_i(\tilde{T}(e_{A_i} \circ R_{A_i} \circ \tilde{T}^{-1}(\chi_B\ e_i)))$$

$$= pr_i(\chi_B\ e_i) = \chi_B\ .$$

Für ein $f \in \mathcal{E}(S,\Sigma,\mu)$ sei $R_{A_i}(f) = \sum_{j=1}^{n} r_j\ \chi_{C_j}$ mit $C_i \cap C_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Dann haben wir:

$$\langle f,\tilde{T}^*(\chi_B\ e_i)\rangle = \langle \tilde{T}f,\ \chi_B\ e_i\rangle$$

$$= \langle pr_i(\tilde{T}(f\ \chi_{A_i})),\chi_B\rangle$$

$$= \langle pr_i(\tilde{T}(e_{A_i}(R_{A_i}(f)))),\chi_B\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{m} r_j\ K_i\ \nu(M_i[C_j]^\sim \cap B)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} r_j\ \mu(C_j \cap M_i^{-1}[B]^\sim)$$

$$\underset{(2)}{=} \int_{A_i} \sum_{j=1}^{n} r_j\ \chi_{C_j}\ R_{A_i}\ K_i\ \tilde{T}^{-1}(\chi_B\ e_i)\ d\mu|_{A_i}$$

$$\underset{(3)}{=} \int_{A_i} \sum_{j=1}^{n} r_j\ \chi_{C_j}\ K_i\ \tilde{T}_i^{-1}(\chi_B)\ d\mu$$

$$= \langle R_{A_i}(f),\ K_i\ \tilde{T}_i^{-1}(\chi_B)\rangle$$

$$= \langle f,e_{A_i}(K_i\ \tilde{T}_i^{-1}(\chi_B))\rangle$$

Weil $\mathcal{E}(S,\Sigma,\mu)$ dicht in $L_1(\mu)$ liegt, folgt für $f \in L_1(\mu)$:
$\langle f,\tilde{T}^*(\chi_B\, e_i)\rangle = \langle f, e_{A_i}(K_i\, \tilde{T}_i^{-1}(\chi_B))\rangle$, und c) ist gezeigt.

(1.3.7.4) Es seien (S_1,Σ_1,μ_1) und (S_2,Σ_2,μ_2) positive, endliche Maßräume. Ferner sei $\tilde{T} : L_1(\mu_1) \to L_1(\mu_2)$ eine Isometrie derart, daß ein $K > 0$ existiert mit:

i) $\tilde{T}(L_1) = L_2$, wobei $L_1 := \{\chi_A;\ A \in \Sigma_1\}$ und $L_2 := \{K\,\chi_B;\ B \in \Sigma_2\}$.

ii) Für alle $A^1,A^2 \in \Sigma_1$ gilt $\tilde{T}(\chi_{A^1 \cap A^2}) = K^{-1}\,\tilde{T}(\chi_{A^1})\tilde{T}(\chi_{A^2})$.

Dann gibt es genau eine Isometrie $T : L_\infty(\mu_1,X) \to L_\infty(\mu_2,X)$

mit $Tg = \sum_{j=\mu}^{n} K^{-1}\, x_j\, \tilde{T}(\chi_{A_j})$ für alle $g = \sum_{j=1}^{n} x_j\, \chi_{A_j} \in \mathcal{E}(S_1,\Sigma_1,\mu_1,X)$
$(A_j \cap A_k = \emptyset,\ j \neq k,\ 1 \leq j,\ k \leq n)$ und $\|Tg\|_{L_1(\mu,X)} = K^{-1}\,\|g\|_{L_1(\mu_1,X)}$
für $g \in L_\infty(\mu_1,X)$.

<u>Beweis:</u> a) Wir zeigen zuerst die Existenz der Isometrie aufs Bild.

Dazu definieren wir für

$g = \sum_{j=1}^{n} x_j\, \chi_{A_j} \in \mathcal{E}(S_1,\Sigma_1,\mu_1,X)$ $(A_j \cap A_k = \emptyset,\ j \neq k\ \ 1 \leq j,\ k \leq n)$:

(1) $\quad Tg := \sum_{j=1}^{n} K^{-1}\, x_j\, \tilde{T}(\chi_{A_j})$

Dann ist $T : \mathcal{E}(S_1,\Sigma_1,\mu_1,X) \to \mathcal{E}(S_2,\Sigma_2,\mu_2,X)$ eine lineare, injektive Abbildung aufgrund der Eigenschaft von $\tilde{T}$.

Weiter gilt für $g \in \mathcal{E}(S_1,\Sigma_1,\mu_1,X)$:

(2) $\quad \|Tg\|_\infty = \|g\|_\infty$, denn $\tilde{T}(\chi_{A_j}) = 0$ genau dann, wenn $\chi_{A_j} = 0$
($\tilde{T}$ ist Isometrie).

Wir wollen nun T auf $L_\infty(\mu_1,X)$ zu einer Isometrie aufs Bild fortsetzen

Sei dafür $g \in L_\infty(\mu_1,X)$.

Nach dem Satz von Egorov [15, S.94, Th. 1] gibt es zu $k \in \mathbb{N}$

$B(k) \in \Sigma_1$ und ein $g(k) = \sum_{j=1}^{n_k} x_j(k)\chi_{B_j^k} \in \mathcal{E}(S_1,\Sigma_1,\mu_1,X)$

$(B_j^k \cap B_i^k = \emptyset$ für $j \neq i$, $B_j^k \subset B(k)$, $1 \leq i, j \leq n)$ derart, daß

(3) $\mu_1(S_1 \setminus B(k)) < \frac{1}{k}$ und $\|g\chi_{B(k)} - g(k)\|_{L_\infty(\mu_1,X)} < \frac{1}{k}$. Man hat damit

sofort $\limsup_{k\to\infty} \|g(k)\|_{L_\infty(\mu_1,X)} = \|g\|_{L_\infty(\mu_1,X)}$.

Dabei kann man o.E. $B(k) \subset B(k+1)$ $(k \in \mathbb{N})$ annehmen.

Wir definieren nun für $k \in \mathbb{N}$:

$$G(k) := \sum_{j=1}^{n_k} K^{-1} x_j \tilde{T}(\chi_{B_j^k}) = T(g(k))$$

Da $\tilde{T}$ i) bzw. ii) erfüllt, gibt es für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $A(k) \in \Sigma_2$ mit

$\tilde{T}(\chi_{B(k)}) = K\chi_{A(k)}$ und $A(k) \subset A(k+1)$.

Nach (2) gilt für ein $k_0 \in \mathbb{N}$ und alle $k,m \geq k_0$:

(4) $\|(G(m) - G(k))\chi_{A(k_0)}\|_{L_\infty(\mu_2,X)} =$

$\|T(g(m)\chi_{B(k_0)} - g(k)\chi_{B(k_0)})\|_{L_\infty(\mu_2,X)} =$ n. (1)

$\|\sum_{j=1}^{n_m} K^{-1} x_j(m) T(\chi_{B_j^m \cap B(k_0)}) - \sum_{j=1}^{n_k} K^{-1} x_j(k) T(\chi_{B_j^k \cap B(k_0)})\|_{L_\infty(\mu_2,X)} =$

$\|g(m)\chi_{B(k_0)} - g(k)\chi_{B(k_0)}\|_{L_\infty(\mu_1,X)} < \frac{2}{k_0}$

(für die letzte Ungleichung verwende man (3)).

Damit bildet $(G(k))_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise auf $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A(k)$ eine Cauchyfolge (beachte $A(k) \subset A(k+1)$ für $k \in \mathbb{N}$).

Nach Wahl von $B(k)$, $(k \in \mathbb{N})$ gilt $\mu_1(S_1 \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B(k)) = 0$, so daß wir wegen der Isometrie $\tilde{T}$ auch $\mu_2(S_2 \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A(k)) = 0$ haben.

(5) Damit gibt es ein $G \in L_\infty(\mu_2,X)$ mit

$G(k) \xrightarrow[k\to\infty]{} G$ punktweise.

(6) Es gilt ferner $\lim_{k\to\infty} \|G - G(k)\|_{L_1(\mu_2,X)} = 0$, <u>denn:</u>

Wegen (2) ist $\|g(k)\|_{L_\infty(\mu_1,X)} = \|G(k)\|_{L_\infty(\mu_2,X)}$ $(k \in \mathbb{N})$.

Ferner folgt mit (3) $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|g(k)\|_{L_\infty(\mu_1,X)} < \infty$.

Da (S_2,Σ_2,μ_2) als endlicher Maßraum vorausgesetzt war, ergibt sich (6) aus (5) mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesgue (vgl. [15, S. 223, Th. 1]) .

Aus (3) erhalten wir $\lim_{k\to\infty} \|g(k)\|_{L_1(\mu_1,X)} = \|g\|_{L_1(\mu_1,X)}$, bzw. mit (6) $\lim_{k\to\infty} \|G(k)\|_{L_1(\mu_2,X)} = \|G\|_{L_1(\mu_2,X)}$, und es gilt wegen (1):

(7) $\|G\|_{L_1(\mu_2,X)} = K^{-1}\|g\|_{L_1(\mu_1,X)}$

Wir setzen nun $T(g) := G$. Dann ist T wohldefiniert, denn ist $(h(k))_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(S_1,\Sigma_1,\mu_1,X)$ eine weitere Folge, die (3) entsprechend erfüllt, dann gibt es ein $H \in L_\infty(\mu_2,X)$ mit $T(h(k)) \xrightarrow[k\to\infty]{} H$ punktweise (vgl. (5)). Da mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesgue $\lim_{k\to\infty} \|g(k) - g\|_{L_1(\mu_1,X)} = \lim_{k\to\infty} \|h(k) - g\|_{L_1(\mu_1,X)} = 0$ folgt, bildet $(g(k) - h(k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine $(L_1(\mu_1,X), \|\cdot\|_{L_1(\mu_1,X)})$-Nullfolge. Somit gilt wegen (6) $\lim_{k\to\infty} \|T(h(k)) - G\|_{L_1(\mu_2,X)} = 0$ und $H = G$.

Aus der Konstruktion von G und der Linearität von T auf $\mathcal{E}(S_1,\Sigma_1,\mu_1,X)$ ist sofort ersichtlich, daß $T : L_\infty(\mu_1,X) \to L_\infty(\mu_2,X)$ linear ist.

Es bleibt noch zu zeigen, daß T eine Isometrie aufs Bild ist.

Es gilt nun $\lim_{k\to\infty} \sup \|G(k)\|_{L_\infty(\mu_2,X)} \leq \|G\|_{L_\infty(\mu_2,X)}$, <u>denn:</u> Angenommen, es gibt ein $\delta > 0$ und eine Teilfolge $(G(k_j))_{j\in\mathbb{N}}$ von $(G(k))_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\|G(k_j)\|_{L_\infty(\mu_2,X)} \geq \|G\|_{L_\infty(\mu_2,X)} + \delta$ für $j \in \mathbb{N}$, so ist nach Definition von $G(k)$ $\overline{\mu}(\{G(k) \neq 0\} \setminus A(k)) = 0$. Andererseits besagt (4) für $k \geq \frac{4}{\delta}$ und allen $m \geq k$: $\|(G(m) - G(k))\, \chi_{A(k)}\|_{L_\infty(\mu_2,X)} < \frac{\delta}{2}$.

Berücksichtigt man (4), dann hat man für hinreichend großes $j \in \mathbb{N}$:

$\|(G - G(k_j))\, \chi_{A(k_j)}\|_{L_\infty(\mu_2 X)} = \|G\, \chi_{A(k_j)} - G(k_j)\|_{L_\infty(\mu_2,X)} \leq \frac{\delta}{2}$ und damit

$$\|G\|_{L_\infty(\mu_2,X)} \geq \|G(k_j)\|_{L_\infty(\mu_2,X)} - \frac{\delta}{2} \geq \|G\|_{L_\infty(\mu_2,X)} + \frac{\delta}{2}$$

was einen Widerspruch darstellt.

Da T auf $\mathbb{E}(S_1,\Sigma_1,\mu_1,X)$ eine Isometrie aufs Bild ist, ergibt sich

$$\|G\|_{L_\infty(\mu_2,X)} \geq \limsup_{k\to\infty} \|G(k)\| = \limsup_{k\to\infty} \|g(k)\|_{L_\infty(\mu_1,X)}$$

$$\underset{(3)}{=} \|g\|_{L_\infty(\mu_1,X)} \quad .$$

Wir haben $\mu_2\big(S_2 \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A(k)\big) = 0$, also gilt mit (4) und (5)

$$\limsup_{k\to\infty} \|G(k)\|_{L_\infty(\mu_2,X)} = \|G\|_{L_\infty(\mu_2,X)} \quad .$$

Aus (3) läßt sich sodann folgern:

$$\|G\|_{L_\infty(\mu_2,X)} = \limsup_{k\to\infty} \|G(k)\|_{L_\infty(\mu_2,X)} =$$

$$= \limsup_{k\to\infty} \|g(k)\|_{L_\infty(\mu_1,X)} \leq \|g\|_{L_\infty(\mu_1,X)} \quad .$$

Damit ist T eine Isometrie aufs Bild.

Schließlich müssen wir noch die Eindeutigkeit nachweisen.

Ist $T_1 : L_\infty(\mu_1,X) \to L_\infty(\mu_2,X)$ eine weitere Isometrie mit den geforderten Eigenschaften, dann gilt

$$T_1\big|_{\mathbb{E}(S_1,\Sigma_1,\mu_1,X)} = T\big|_{\mathbb{E}(S_1,\Sigma_1,\mu_1,X)} \quad .$$

Aus der $\|\cdot\|_{L_1(\mu_1,X)}$ - $\|\cdot\|_{L_1(\mu_2,X)}$-Stetigkeit von T sowie T_1 und der Dichtheit von $\mathbb{E}(S_1,\Sigma_1,\mu_1,X)$ in $L_1(\mu_1,X)$ ergibt sich die Eindeutigkeit.

b) Durch zweimalige Anwendung von Teil a) wollen wir nun zeigen, daß T eine Isometrie ist.

Beweis: Zuerst bilden wir die eindeutige Isometrie $T : L_\infty(\mu_1,X) \to L_\infty(\mu_2,X)$ aufs Bild (vgl. a)). Vertauscht man die Maßräume (S_1,Σ_1,μ_1) und (S_2,Σ_2,μ_2), so gibt es $(\tilde{T}^{-1}:L_1(\mu_2) \to L_1(\mu_1)$ ist Isometrie, die i) und ii) mit K^{-1} entsprechend erfüllt) eine Isometrie $T_1 : L_\infty(\mu_2,X) \to L_\infty(\mu_1,X)$ mit

$$T_1 g = \sum_{j=1}^{n} K\, x_j\, \tilde{T}^{-1}(\chi_{B_j}) \text{ für } g = \sum_{j=1}^{n} x_j\, \chi_{B_j} \in \mathbb{E}(S_2,\Sigma_2,\mu_2,X)$$

und $\|T_1 g\|_{L_1(\mu_1,X)} = K \|g\|_{L_1(\mu_2,X)}$ für $g \in L_\infty(\mu_2,X)$.

Dann gilt für $g \in E(S_1,\Sigma_1,\mu_1,X)$, $g = \sum_{j=1}^{n} x_j \chi_{A_j}$

$$T_1 T(g) = T_1\Big(\sum_{j=1}^{n} K x_j \tilde{T}(\chi_{A_j})\Big) = \sum_{j=1}^{n} x_j \tilde{T}^{-1} \tilde{T}(\chi_{A_j}) = g$$

und für $g \in E(S_2,\Sigma_2,\mu_2,X)$ ebenso $TT_1(g) = g$.

Wegen der $\|\cdot\|_{L_1(\mu_1,X)} - \|\cdot\|_{L_1(\mu_2,X)}$- Stetigkeit von T und der $\|\cdot\|_{L_1(\mu_2,X)} - \|\cdot\|_{L_1(\mu_1,X)}$-Stetigkeit von T_1 folgt: $TT_1 = T_1 T = \mathrm{id}$, denn $E(S_1,\Sigma_1,\mu_1,X) \subset L_1(\mu_1,X)$ und $E(S_2,\Sigma_2,\mu_2,X) \subset L_1(\mu_1,X)$ liegen dicht.

Also ist $T^{-1} = T_1$ und T ist Isometrie. □

Wir zeigen nun noch:

(1.3.7.5.) Für positive und endliche Maßräume (S_1,Σ_1,μ_1) und (S_2,Σ_2,μ_2) gilt: Ist $\tilde{T} : L_1(\mu_1) \to L_1(\mu_2)$ eine Isometrie, die i) und ii) mit $K > 0$ erfüllt, und ist $T : L_1(\mu_2,X) \to L_1(\mu_1,X)$ eine Isometrie derart, daß man für $g = \sum_{j=1}^{n} x_j' \chi_{A_j} \in E(S_1,\Sigma_1,\mu_1,X')$ und den adjungierten Operator $T^* : L_1(\mu_1,X)' \to L_1(\mu_2,X)'$ $Tg^* = \sum_{j=1}^{n} K^{-1} x_j' \tilde{T}(\chi_{A_j})$ hat, so gilt $T^*(L_\infty(\mu_1,X')) = L_\infty(\mu_2,X')$ und $\|T^*g\|_{L_1(\mu_2,X')} = K^{-1} \|g\|_{L_1(\mu_1,X')}$ für $g \in L_\infty(\mu_1,X')$.

<u>Beweis:</u> Nach (1.3.7.4.) gibt es genau eine Isometrie

$T_1 : L_\infty(\mu_1,X') \to L_\infty(\mu_2,X')$, so daß für $g = \sum_{j=1}^{n} x_j' \chi_{A_j}$

$(A_j \in \Sigma_1 \quad A_j \cap A_k = \emptyset,\ j \neq k,\ 1 \leq j, k \leq n)$

$T_1 g = \sum_{j=1}^{n} K^{-1} x_j' \tilde{T}(\chi_{A_j})$. Wir wollen nun zeigen, daß $T^*|_{L_\infty(\mu_1,X')} = T_1$.

Weil $E(S_2,\Sigma_2,\mu_2,X)$ in $L_1(\mu_2,X)$ dicht liegt, brauchen wir nur für

$A \in \Sigma_2$ und $x \in S(X)$ nachweisen:

$\langle x\ \chi_A, T^*g\rangle = \langle x\ \chi_A, T_1 g\rangle$ für $g \in L_\infty(\mu_1, X')$.

Zu $\varepsilon > 0$ sei $\delta := \min\left(\dfrac{\varepsilon\cdot(\mu_1(S_1)+1)^{-1}}{6(\|g\|_\infty + K^{-1}+1)}, \dfrac{\varepsilon}{3(\mu_2(A)+1)}\right)$.

Nach Egorov gibt es ein $g_\delta \in \mathcal{E}(S_1, \Sigma_1, \mu_1, X')$, sowie $B_\delta \in \Sigma_1$ mit $\mu_1(S \setminus B_\delta) < \delta$, $\|g\ \chi_{B_\delta} - g_\delta\|_\infty < \delta$ und $g_\delta\ \chi_{B_\delta} = g_\delta$.

Dann gilt: (1) $\|T_1\ g - T_1\ g_\delta\|_{L_1(\mu_2, X')} = K^{-1}\|g - g_\delta\|_{L_1(\mu_1, X')}$

$$\leq K^{-1}\left(\int_{S_1 \setminus B_\delta} \|g\|\, d\mu_1 + \int_{B_\delta} \|g - g_\delta\|\, d\mu_1\right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

und somit

$$\begin{aligned}
|\langle x\ \chi_A, T_1 g - T^*g\rangle| &\leq |\langle x\ \chi_A, T_1 g - T_1 g_\delta\rangle| + |\langle x\ \chi_A, T_1 g_\delta - T^*g_\delta\rangle| + \\
&\quad |\langle x\ \chi_A, T^*g_\delta - T^*g\rangle| \\
&\leq \|x\|\ \|T_1 g - T_1 g_\delta\|_{L_1(\mu_2, X')} + |\langle T(x\ \chi_A), g_\delta - g\rangle| \\
&\underset{\text{nach (1)}}{\leq} \varepsilon/3 + \left|\int_{S_1 \setminus B_\delta} \langle T(x\ \chi_A), g\rangle\, d\mu_1\right| + \\
&\quad \int_{B_\delta} \|T(x\ \chi_A)\|\ \|g_\delta - g\|\ d\mu_1 \\
&\leq \varepsilon/3 + \mu_1(S \setminus B_\delta)\|x\|\ \|g\|_{L_\infty(\mu_1, X')} + \\
&\quad \|T(x\ \chi_A)\|_1\ \|g_\delta - g\ \chi_{B_\delta}\|_{L_\infty(\mu_1, X)} \\
&< \varepsilon/3 + \varepsilon/6 + \|x\|\ \mu(A)\ \|g_\delta - g\ \chi_{B_\delta}\|_{L_\infty(\mu_1, X')} \\
&< \varepsilon/3 + \varepsilon/6 + \varepsilon/3 < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig vorausgesetzt ist, haben wir also für alle $f \in L_1(\mu, X)$ $\langle f, T^*g\rangle = \langle f, T_1 g\rangle$ und $T^*|_{L_\infty(\mu_1, X')} = T_1$, so daß die Aussage nach (1.3.7.4.) folgt. □

(1.4.) Begriffe aus der topologischen Maßtheorie

Für die Betrachtung geometrischer Eigenschaften von $L_1(\mu,X)$ in Paragraph 3 benötigen wir Begriffe aus der topologischen Maßtheorie.

(1.4.1.) Es sei $(T,\mathcal{T})$ ein separierter topologischer Raum. Dann bezeichnen wir mit $Bo(T,\mathcal{T}) := \sigma(U \in \mathcal{T})$ die "Borelmengen" bzw. "Borel-σ-Algebra" auf $(T,\mathcal{T})$.

(1.4.2.) Für einen separierten topologischen Raum $(T,\mathcal{T})$ nennen wir ein Maß $\nu : Bo(T,\mathcal{T}) \to [0,\infty]$ ein "endliches reguläres Borelmaß" (bzw. endliches Radonmaß), falls $\nu(T) < \infty$, und es für alle $U \in Bo(T,\mathcal{T})$ und $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset U$ gibt mit $\nu(U \setminus K) < \varepsilon$. Mit $M(T,\mathcal{T})$ bezeichnen wir die Menge aller regulären endlichen Borelmaße.

(1.4.3.) Es sei $(T,\mathcal{T})$ ein separierter topologischer Raum und $\nu \in M(T,\mathcal{T})$, so sei $K := \bigcap_{\substack{A \text{ abg.} \\ \nu(A)=\nu(T)}} A$ der "Träger" von ν.

(1.4.4.) Es sei $(T,\mathcal{T})$ ein separierter topologischer Raum. Wir nennen die kleinste σ-Algebra, bezüglich der jede stetige Abbildung $f : (T,\mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ $\mathfrak{B}$-meßbar ist, die "Baire-σ-Algebra", in Zeichen $Ba(T,\mathcal{T})$.

(1.4.5.) Sind $(T,\mathcal{T})$ ein separierter topologischer Raum und (E,τ) ein separierter lokalkonvexer Raum, so heißt eine Abbildung $J : T \to E$ für ein $\nu \in M(T,\mathcal{T})$ skalar ν-meßbar, falls für alle $e' \in E'$ $\langle J(\cdot),e'\rangle$ ν-meßbar ist im Sinne von (1.3.2.).

Die Definition (1.4.3.) wurde [45, S.5] entnommen, während wir uns bei (1.4.5.) auf [44] beziehen.

§ 2. Das duale Paar $\langle L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X')\rangle$

Als zentrales Ergebnis wurde in [5] bewiesen, daß für einen endlichen, positiven Maßraum (S,Σ,μ) jede σ'-kompakte Teilmenge ein Eberlein Kompaktum und $(L_1(\mu,X),\sigma')$ angelisch ist. Man zeigt dies, indem man für eine σ'-kompakte Teilmenge K eine Menge Γ und einen linearen injektiven und σ'-$\sigma(c_0(\Gamma),\ell_1(\Gamma))$-stetigen Operator $T : \overline{\mathrm{span}}^{\sigma'} K \to c_0(\Gamma)$ findet. Die Aussage stellt eine Parallele zu dem bekannten Theorem von Amir-Lindenstrauß für WCG-Banachräume dar [1]. Im ersten Abschnitt werden wir nun diese Ergebnisse auf einen positiven Maßraum gemäß (1.3.3.5.) übertragen.

Insbesondere die Tatsache, daß $(L_1(\mu,X),\sigma')$ angelisch ist, wird es uns ermöglichen, eine Reihe von Eigenschaften und Charakterisierungen relativ σ'-kompakter Teilmengen abzuleiten. In diesem Zusammenhang sei besonders auf die Übertragung des Satzes von Krein (vgl. [21, S.82 7.1.] bzw. (2.1.14)) und des Satzes von R.C. James (vgl. [21, S.77, 6.8 Cor] bzw. (2.1.15)) hingewiesen. Die Voraussetzungen für diese Sätze erfüllen insbesondere jene lokalkonvexen topologischen Räume, deren feinste kompatible lokalkonvexe Topologie, die Mackey-Topologie,quasivollständig ist. Deshalb bietet sich eine gesonderte Betrachtung der Mackey-Topologie $\tau := \tau(L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X'))$ auf $L_1(\mu,X)$ an.

Wir werden im 2. Abschnitt dieses Paragraphen zeigen, daß $(L_1(\mu,X),\tau)$ für einen strikt lokalisierbaren Maßraum quasivollständig ist. Hieraus leitet sich, neben einer Charakterisierung relativ τ-kompakter Teilmengen, als Hauptfolgerung die Gleichheit von relativ τ-kompakten und

relativ $\|\cdot\|_1$-kompakten Teilmengen ab. Aus diesen Ergebnissen erhalten wir eine weitere Charakterisierung der RNP von X' bezüglich (S,Σ,μ): X' besitzt genau dann die RNP bezüglich (S,Σ,μ), wenn $(L_1(\mu,X),\tau)$ metrisierbar ist.

(2.1.) Relativ σ'-kompakte Teilmengen

In diesem Abschnitt wenden wir uns ausschließlich der Betrachtung und Charakterisierung relativ σ'-kompakter Teilmengen zu. Damit wir zeigen können, daß für einen beliebigen positiven Maßraum gemäß (1.3.3.5.) und zu einer σ'-kompakten Teilmenge $K \subset L_1(\mu,X)$ es einen injektiven, linearen und σ'-$\sigma(c_0(\Gamma),\ell_1(\Gamma))$-stetigen Operator $T : \overline{\text{span}}^{\sigma'} K \to c_0(\Gamma)$ gibt, werden wir $L_1(\mu,X)$ durch eine direkte Summe von $L_1(\mu_{|A},X)$-Räumen darstellen, wobei $L_1(\mu_{|A},X)$ über einen positiven, endlichen Maßraum gebildet ist. Wir können dann das Hauptergebnis aus [5] jeweils für die Räume $L_1(\mu_{|A},X)$ anwenden und erhalten durch geeignetes Zusammensetzen der einzelnen Abbildungen die Verallgemeinerung von [5, S. 241, Main Theorem]. Schwieriger wird es, wenn man zeigen will, daß $(L_1(\mu,X),\sigma')$ angelisch ist. Es gibt keinen einfachen Weg, die Gleichheit von relativ σ'-abzählbar kompakten und relativ σ'-kompakten Teilmengen nachzuweisen. Daher wählt man sich eine gröbere Topologie auf $L_1(\mu,X)$, nämlich die schwache Topologie σ'_c des dualen Paares $\langle L_1(\mu,X),L^c_\infty(\mu,X')\rangle$ (vgl. (1.3.4.)) und weist nach, daß $(L_1(\mu,X),\sigma'_c)$ angelisch ist. Mit der Anwendung des "Angelic-Theorem" (vgl. [21, S.31, 33 (2)]) ist $(L_1(\mu,X)\sigma')$ ebenfalls angelisch.

Damit läßt sich mit Hilfe einer Klasse von Operatoren $T \in L(L_1(\mu,X),c_0)$, ähnlich wie in [4], eine Charakterisierung relativ σ'-kompakter Teilmengen

finden. Sie führen schließlich zu zwei Ergebnissen, die auf die Quasivollständigkeit von $L_1(\mu,X)$, versehen mit der Mackey-Topologie schießen lassen. Als erstes zeigt sich, daß die konvexe (bzw. absolut konvexe) Hülle einer relativ σ'-kompakten Teilmenge erneut relativ σ'-kompakt ist (vgl. den Satz von Krein [21, S.82, 7.1]). Zum anderen erhält man eine Charakterisierung σ'-kompakter Teilmengen im Sinne von R.C. James (vgl. [21, S.77, 6.8 Cor.] und (2.1.14)). Diese Ergebnisse leiten dann zu dem 2. Abschnitt über, nämlich zur Beantwortung der Frage, ob $L_1(\mu,X)$ mit der Mackey-Topologie quasivollständig ist.

Wir führen noch folgende grundlegende Definition ein:

<u>(2.1.1.) Definition:</u> Ist (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.), so nennen wir für eine σ'-kompakte Teilmenge $K \subset L_1(\mu,X)$ $L := \overline{\text{span}}^{\sigma'} K$ einen "<u>σ'-kompakt erzeugten Teilraum</u>".

Wir hatten schon in der Einleitung erwähnt, daß gerade die σ'-kompakt erzeugten Teilräume ein lohnendes Objekt zur Untersuchung der σ'-Topologie darstellen. In (2.1.), (4.6.), aber insbesondere im Paragraph 5, in dem wir einige Beispiele anführen, beschäftigen wir uns mit σ'-kompakten Teilräumen.

Dabei werden wir insbesondere erkennen, daß es σ'-kompakt erzeugte Teilräume gibt, die nicht WCG sind. Ebenso läßt sich ein Beispiel einer σ'-kompakten Teilmenge K angeben, so daß sich die σ'-abgeschlossen lineare Hülle nicht als normabgeschlossene lineare Hülle einer σ'-kompakten Teilmenge $K_0 \subset \overline{\text{span}}^{\sigma'} K$ darstellen läßt. Damit wir ähnliche Aussagen über WCG-Banachräume erhalten können, wählen wir den σ'-Abschluß (vgl. [5,S.241-244])

Als erstes wollen wir zeigen, daß man jeden Maßraum (S,Σ,μ) in eine Familie von endlichen strikt positiven Maßräumen $(A_\iota,\Sigma \cap A_\iota,\mu_{|\Sigma \cap A_\iota})$ derart zerlegen kann, daß das Maß des Durchschnittes paarweise verschiedener A_ι verschwindet. Wir gewinnen hieraus eine Darstellung von $L_1(\mu,X)$ durch $L_1(\mu_{|A_\iota},X)$-Räumen, die über endlichen Maßräumen gebildet sind. Den Fall $X = \mathbb{K}$ findet man in [37, S.136, Cor]. Dieses Hilfsmittel erlaubt es uns, viele Ergebnisse, die man für endliche Maßräume erhalten hat, auf beliebige Maßräume zu übertragen.

<u>(2.1.2.) Lemma:</u> Es sei (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.).

a) Dann gibt es eine Familie $(A_\iota)_{\iota\in I} \subset \Sigma_e$ mit $\mu(A_\iota) > 0$ und $\mu(A_\iota \cap A_j) = 0$ für $\iota \neq j$, $\iota,j \in I$ derart, daß es für alle $f \in \mathcal{L}_1(\mu,X)$ eine abzählbare Teilmenge $T \subset I$ gibt, mit
$$\overline{\mu}\Big(\{s \in S;\ f(s) \neq 0\} \setminus \bigcup_{\iota\in T} A_\iota\Big) = 0$$

b) Ist $(A_\iota)_{\iota\in I} \subset \Sigma_e$ eine Familie die a) erfüllt, so stellt
$$J : L_1(\mu,X) \longrightarrow \Big(\bigoplus_{\iota\in I} L_1(\mu_{|A},X)\Big)_{\ell_1(I)}$$
$$f \longmapsto (R_{A_\iota} f)_{\iota\in I}$$
eine σ'-$\sigma\Big[\Big(\bigoplus_{\iota\in I} L_1(\mu_{|A_\iota},X)\Big)_{\ell_1(I)}, \Big(\bigoplus_{\iota\in I} L_\infty(\mu_{|A_\iota},X')\Big)_{\ell_\infty^c(I)}\Big]$ - stetige Isometrie dar.

<u>Beweis:</u> Wir betrachten die Menge

$\mathfrak{T} := \{\mathfrak{A} \subset \overline{\Sigma}_e;$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ ist $\overline{\mu}(A) > 0$, und für $A,B \in \mathfrak{A}$, $A \neq B$ gilt $\overline{\mu}(A \cap B) = 0\}$.

Auf $\mathfrak{T}$ führen wir die Ordnung $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{A}' :\Longleftrightarrow \mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$ ein. Ist nun $\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{T}$ eine nichtleere totalgeordnete Teilmenge, so ist $\bigcup_{\mathfrak{A}\in\mathfrak{T}'} \mathfrak{A} \in \mathfrak{T}$.

Nach dem Zornsches Lemma gibt es ein maximales Element $\tilde{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{T}$. Wir schreiben $\tilde{\mathfrak{A}} = \{A_\iota ; \iota \in I\}$. Da $\mu(S) > 0$ ist, und (S,Σ,μ) keine Atome $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) = \infty$ besitzt, kann I nicht leer sein. Man wähle nun für $\iota \in I$ $A_\iota \in \Sigma_e$, so daß $\tilde{A}_\iota = A_\iota \cup N_\iota$, wobei $\overline{\mu}(N_\iota) = 0$ ist.

a) Es sei nun $f \in \mathcal{L}_1(\mu,X)$ und $\operatorname{supp} f := \{s \in S;\ f(s) \neq 0\} \in \overline{\Sigma}$. Nach [15, S.124, Prop. 9] besitzt f einen σ-finiten Träger $\operatorname{supp} f$. Damit ist $T := \{\iota \in I;\ \overline{\mu}(A_\iota \cap \operatorname{supp} f) > 0\}$ abzählbar, da nach Definition von $\mathfrak{T}$ und Wahl von $\tilde{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{T}$ $\mu(A_\iota \cap A_j) = 0$ für $\iota \neq j$, $\iota,j \in I$ gilt.

Also haben wir für alle $\iota \in I$: $\overline{\mu}(A_\iota \cap (\operatorname{supp} f \setminus \bigcup_{\iota' \in T} A_{\iota'})) = 0$. Damit ergibt sich aber $\mu(\operatorname{supp} f \setminus \bigcup_{\iota \in T} A_\iota) = 0$, denn ansonsten findet man ein $A \subset \operatorname{supp} f \setminus \bigcup_{\iota \in T} A_\iota$, $0 < \mu(A) < \infty$, da (S,Σ,μ) kein Atom mit unendlichem Maß besitzt. Dies widerspräche dann aber der Maximalität von $\tilde{\mathfrak{A}}$.

b) Mit Teil a) erhalten wir für $f \in L_1(\mu,X)$:

$\|f\|_1 \leq \|Jf\|$.

Andererseits gilt für $\iota \neq j$, $\iota,j \in I$ $\mu(A_\iota \cap A_j) = 0$, so daß man erneut mit a) $\|Jf\| \leq \|f\|_1$ hat. Damit ist J eine Isometrie aufs Bild.

Ist $(f_\iota)_{\iota \in I} \in \left(\bigoplus_{\iota \in I} L_1(\mu|_{A_\iota},X)\right)_{\ell_1(I)}$, so existiert $f := \sum_{\iota \in I} e_{A_\iota}(f_\iota)$ in $L_1(\mu,X)$ nach Definition der Norm in $\left(\bigoplus_{\iota \in I} L_1(\mu|_{A_\iota},X)\right)_{\ell_1(I)}$ und $Jf = (f_\iota)_{\iota \in I}$.

Wir zeigen schließlich, daß für alle $g = (g_\iota)_{\iota \in I} \in \left(\bigoplus_{\iota \in I} (L_\infty(\mu|_{A_\iota},X'))_{\ell_\infty^c(I)}\right)$ ein $G \in L_\infty(\mu,X')$ existiert mit $\langle Jf,g\rangle = \langle f,G\rangle$ für $f \in L_1(\mu,X)$.

Hieraus folgt sofort die

$\sigma' - \sigma\left(\left(\bigoplus_{\iota \in I} L_1(\mu|_{A_\iota},X)\right)_{\ell_1(I)}, \left(\bigoplus_{\iota \in I} L_\infty(\mu|_{A_\iota},X')\right)_{\ell_\infty^c(I)}\right)$-Stetigkeit von J.

Sei also $g = (g_\iota)_{\iota\in I} \in \left(\bigoplus_{\iota\in I} L_\infty(\mu_{|A_\iota}, X')\right)_{\ell_\infty^c(I)}$.

Nach Definition von $\ell_\infty^c(I)$ und aufgrund der Eigenschaft $\mu(A_\iota \cap A_j) = 0$ für $\iota \neq j$, $\iota,j \in I$ existiert $G = \sum_{\iota\in I} \tilde{e}_{A_\iota}(g_\iota)$ (punktweise gebildet) in $L_\infty(\mu,X')$. Ist nun $f \in L_1(\mu,X)$, so hat man

$$\langle Jf,g\rangle = \sum_{\iota\in I} \langle R_{A_\iota}(f), g_\iota\rangle = \sum_{\iota\in I} \langle f, \tilde{e}_{A_\iota}(g_\iota)\rangle .$$

Setzt man $R := \{\iota \in I;\ g_\iota \neq 0\}$, so ist R abzählbar, und es gilt $\langle Jf,g\rangle = \sum_{\iota\in R} \langle f, \tilde{e}_{A_\iota}(g_\iota)\rangle$. Für alle endlichen Teilmengen $T \subset R$ und μ-fast alle $s \in S$ gilt:

$$\left|\sum_{\iota\in T} \langle f(s), \tilde{e}_{A_\iota}(g_\iota)(s)\rangle\right| \leq \|f(s)\|\ \|g\|_\infty .$$

Ferner wissen wir $G = \sum_{\iota\in I} \tilde{e}_{A_\iota}(g_\iota)$ punktweise, so daß man mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesgue [15, S.223, Th.1] $\langle Jf,g\rangle = \langle f,G\rangle$ schließen kann. □

<u>(2.1.3.) Korollar:</u> Ist (S,Σ,μ) ein strikt lokalisierbarer positiver Maßraum mit zugehöriger Partition $(\tilde{A}_\iota)_{\iota\in I}$, so gibt es eine paarweise disjunkte Familie $(A_\iota)_{\iota\in I} \subset \Sigma_e$ derart, daß

$$J : L_1(\mu,X) \to \left(\bigoplus_{\iota\in I} L_1(\mu_{|A_\iota}, X)\right)_{\ell_1(I)}$$
$$f \mapsto (R_{A_\iota} f)_{\iota\in I}$$

eine Isometrie und einen

σ'-$\sigma\left(\left(\bigoplus_{\iota\in I} L_1(\mu_{|A_\iota},X)\right)_{\ell_1(I)}, \left(\bigoplus_{\iota\in I} L_\infty(\mu_{|A_\iota},X')\right)_{\ell_\infty(I)}\right)$-Homöomorphismus

darstellt.

<u>Beweis:</u> Zu $\iota \in I$ wähle man $A_\iota \in \Sigma_e$, $A_\iota \subset \tilde{A}_\iota$ mit $\mu(\tilde{A}_\iota \setminus A_\iota) = 0$. Dann gilt $A_\iota \cap A_j = \emptyset$ für $\iota \neq j$, $\iota,j \in I$ und damit insbesondere $\mu(A_\iota \cap A_j) = 0$ für $\iota \neq j$, $\iota,j \in I$.

Ferner gilt nach Definition von $\mathcal{L}_1(\mu,X)$ für $f \in \mathcal{L}_1(\mu,X)$:

$R := \{\iota \in I, \overline{\mu}(\{s \in S; f(s) \neq 0\} \cap \tilde{A}_\iota) > 0\}$ ist abzählbar. Nach Wahl der Familie $(A_\iota)_{\iota\in I} \subset \Sigma_e$ bzw. da $\bigcup_{\iota\in I} \tilde{A}_\iota = S$, genügt $(A_\iota)_{\iota\in I}$ der Voraussetzung von Satz (2.1.2. b) und J ist Isometrie.

Wir behaupten nun $\tilde{J} : \left(\bigoplus_{\iota\in I} L_\infty(\mu_{|A_\iota},X')\right)_{\ell_\infty(I)} \to L_\infty(\mu,X')$

$$g = (g_\iota)_{\iota\in I} \mapsto \sum_{\iota\in I} \tilde{e}_{A_\iota}(g_\iota)$$

bildet eine Isometrie.

Für $g = (g_\iota)_{\iota\in I} \in \left(\bigoplus_{\iota\in I} L_\infty(\mu_{|A_\iota},X')\right)_{\ell_\infty(I)}$ ist $G := \sum_{\iota\in I} \tilde{e}_{A_\iota}(g_\iota)$ μ-meßbar, da $G\,\chi_{\tilde{A}_\iota}$ μ-meßbar (vgl. (1.3.3.7)) ist für alle $\iota \in I$.

Wir haben $\|\tilde{J}g\| \leq \|g\|$, da die Familie $(A_\iota)_{\iota\in I}$ paarweise disjunkt ist, und für $N \in \overline{\Sigma}$ gilt: $\overline{\mu}(N) = 0$ genau dann, wenn $\overline{\mu}(N \cap \tilde{A}_\iota) = 0$ für alle $\iota \in I$ (vgl. (1.3.3.8.)).

Aus der Definition von J ist sofort ersichtlich: $\|\tilde{J}g\| \geq \|g\|$.

Somit ist $\tilde{J}$ eine Isometrie aufs Bild.

$\tilde{J}$ ist surjektiv, denn ist $G \in L_\infty(\mu,X')$, so sei für $\iota \in I$

$g_\iota := \tilde{R}_{A_\iota}(G) \in L_\infty(\mu_{|A_\iota},X')$.

Dann ist $\|g_\iota\|_{L_\infty(\mu_{|A_\iota},X')} \leq \|G\|_\infty$ und damit

$g := (g_\iota)_{\iota\in I} \in \left(\bigoplus_{\iota\in I} L_\infty(\mu_{|A_\iota},X')\right)_{\ell_\infty(I)}$.

Aus der Definition wird sofort klar:

$Jg = \sum_{\iota\in I} \tilde{e}_{A_\iota}(\tilde{R}_{A_\iota}(G)) = G$ und J ist Isometrie.

Wir zeigen nun $J^*\big|_{\left(\bigoplus_{\iota\in I} L_\infty(\mu_{|A_\iota},X')\right)_{\ell_\infty(I)}} = \tilde{J}$

(wobei J^* die Adjungierte zu J ist):

Dazu seien $f \in L_1(\mu,X)$ und $g = (g_\iota)_{\iota\in I} \in \left(\bigoplus_{\iota\in I} L_\infty(\mu_{|A_\iota},X')\right)_{\ell_\infty(I)}$.

$$\langle f, J^* g\rangle = \langle J f, g\rangle = \sum_{\iota\in I} \langle R_{A_\iota}(f), g\rangle =$$

$$= \sum_{\iota\in I} \langle f, \tilde{e}_{A_\iota}(g_\iota)\rangle = \langle f, \sum_{\iota\in I} \tilde{e}_{A_\iota}(g)\rangle = \langle f, \tilde{J} g\rangle .$$

Nun gilt aber für eine Isometrie: $(J^{-1})^* = J^{*-1}$.

Damit erhält man $J^{-1*}|_{L_\infty(\mu,X')} = \tilde{J}^{-1}$. Also haben wir nach (1.2.2.):

J ist ein σ'- $\sigma\left[\left(\bigoplus_{l\in I} L_1(\mu|_{A_l}, X)\right)_{\ell_1(I)}, \left(\bigoplus_{l\in I} L_\infty(\mu|_{A_l}, X')\right)_{\ell_\infty(I)}\right]$ - Homöomorphismus. □

Wir wollen nun die Ergebnisse aus [5, S.241 Main Theorem] auf einen beliebigen positiven Maßraum gemäß (1.3.3.5.) verallgemeinern. Damit wir zeigen können, daß $(L_1(\mu,X),\sigma')$ angelisch ist, müssen wir einen kleinen Umweg über die σ'_c-Topologie machen (vgl. (1.3.4.)). Es wird sich herausstellen, daß $(L_1(\mu,X),\sigma'_c)$ angelisch ist.

<u>(2.1.4.) Lemma:</u> Ist (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.), so sind für eine Teilmenge $K \subset L_1(\mu,X)$ äquivalent:

a) K ist relativ σ'_c-kompakt.

b) K ist relativ σ'_c-abzählbar kompakt.

c) i) K ist beschränkt.

ii) Für alle $A \in \Sigma_e$ ist $R_A(K)$ relativ σ'_A-kompakt.

<u>Beweis:</u>

<u>a) ⇒ b):</u> Dies gilt allgemein für alle Hausdorffräume.

<u>b) ⇒ c):</u> $L^c_\infty(\mu,X')$ ist nach (1.3.4.1.) normierend für $L_1(\mu,X)$. Damit folgt i) aus dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit (man beachte, daß $L^c_\infty(\mu,X')$ ein Banachraum ist.). Die σ'_c-σ'_A-Stetigkeit von R_A (für $A \in \Sigma_e$) und [4, S.411, Th. 2.1.] implizieren ii).

<u>c) ⇒ a):</u> Wir betrachten die Einbettung

$$\varkappa : L_1(\mu,X) \to L^c_\infty(\mu,X')'$$

$$f \mapsto \int_S \langle f(s),\cdot\rangle \, d\mu\,(S)$$

Nach (1.3.4.2.) ist x eine Isometrie aufs Bild.

Die Definition zeigt:

(1) x ist σ'_c-$\sigma(L^c_\infty(\mu,X')',L^c_\infty(\mu,X'))$-stetig und

(2) x^{-1} ist $\sigma(L^c_\infty(\mu,X')',L^c_\infty(\mu,X')) \cap x(L_1(\mu,X))$-$\sigma'_c$-stetig.

Wenn wir zeigen, daß $\overline{x(K)}^{\sigma(L^c_\infty(\mu,X')',L^c_\infty(\mu,X'))} \subset x(L_1(\mu,X))$ gilt, sind wir fertig. Denn $\overline{x(K)}^{\sigma(L^c_\infty(\mu,X')',L^c_\infty(\mu,X'))}$ ist, da K beschränkt und x eine Isometrie ist, $\sigma(L^c_\infty(\mu,X')',L^c_\infty(\mu,X'))$-kompakt. Aus (2) folgt $x^{-1}\left(\overline{x(K)}^{\sigma(L^c_\infty(\mu,X')',L^c_\infty(\mu,X'))}\right) \subset \overline{K}^{\sigma'_c}$. Andererseits gilt wegen (1)

$$x(\overline{K}^{\sigma'_c}) \subset \overline{x(K)}^{\sigma(L^c_\infty(\mu,X')',L^c_\infty(\mu,X'))} .$$

Also haben wir $x^{-1}\left(\overline{x(K)}^{\sigma(L^c_\infty(\mu,X')',L^c_\infty(\mu,X'))}\right) = \overline{K}^{\sigma'_c}$ und mit (2) ist $\overline{K}^{\sigma'_c}$ σ'_c-kompakt.

Wir wählen ein $\phi \in \overline{x(K)}^{\sigma(L^c_\infty(\mu,X')',L^c_\infty(\mu,X'))}$. Für $B \in \Sigma_e$ ist $\phi^B := \phi \circ \tilde{e}_B$ ein stetiges lineares Funktional auf $L_\infty(\mu_{|B},X')$.

Bezeichnet $x_B : L_1(\mu_{|B},X) \to L_\infty(\mu_{|B},X')'$ die analog zu x gebildete Isometrie, so folgt:

$$\phi^B \in \overline{x_B(R_B(K))}^{\sigma(L_\infty(\mu_{|B},X')',L_\infty(\mu_{|B},X'))} .$$

Denn zu ϕ gibt es ein Netz $(f_\alpha)_{\alpha\in J} \subset K$ derart, daß für alle $g \in L^c_\infty(\mu,X')$:

$$\langle f_\alpha,g\rangle = \langle x(f_\alpha),g\rangle \xrightarrow[\alpha\in J]{} \langle\phi,g\rangle .$$

Wegen der σ'-σ'_B-Stetigkeit hat man für $g \in L_\infty(\mu_{|B},X')$

$$\begin{aligned}\langle x_B(R_B(f_\alpha)),g\rangle &= \langle R_B(f_\alpha),g\rangle \\ &= \langle f_\alpha,\tilde{e}_B(g)\rangle \xrightarrow[\alpha\in J]{} \langle\phi,\tilde{e}_B(g)\rangle = \langle\phi^B,(g)\rangle\end{aligned}$$

Da nach (ii) für alle $B \in \Sigma_e$ $R_B(K)$ relativ σ'_B-kompakt ist, gilt:

(3) Es existiert ein $f_B \in \overline{R_B(K)}^{\sigma'_B}$ derart, daß für alle

$g \in L_\infty(\mu_{|B},X')$: $\langle f_B,g\rangle = \langle \phi^B,g\rangle$.

Man kann nach i) o.E. $\sup_{f\in K} \|f\|_1 \leq 1$ annehmen.

Wir wählen die Familie $(A_\iota)_{\iota\in I}$ aus Lemma (2.1.2.) und $f_\iota \in L_1(\mu_{|A_\iota},X)$, so daß für alle $g \in L_\infty(\mu_{|A_\iota},X')$

$$\langle f_\iota,g\rangle = \langle \phi^{A_\iota},g\rangle \qquad (\iota \in I).$$

Wir wollen nun zeigen, daß man

$$\sum_{\iota\in I} \|e_{A_\iota} f_\iota\|_1 = \sum_{\iota\in I} \|f_\iota\|_{L_1(\mu_{|A_\iota},X)} < \infty \quad \text{hat.}$$

Annahme: Es gibt eine Folge $(\iota_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \|f_{\iota_n}\|_{L_1(\mu_{|A_{\iota_n}},X)}$ nicht existiert. Nach (1.3.4.1.) findet man zu $n \in \mathbb{N}$ ein $g_{\iota_n} \in B(L_\infty(\mu_{|A_{\iota_n}},X'))$ mit

$$\langle f_{\iota_n},g_{\iota_n}\rangle \geq \tfrac{1}{2} \|f_{\iota_n}\|_{L_1(\mu_{|A_{\iota_n}},X)} .$$

Damit ist für alle $m \in \mathbb{N}$ $\sum_{n=1}^{m} \tilde{e}_{A_{\iota_n}}(g_{\iota_n}) \in B(L_\infty^c(\mu,X'))$

(man beachte dabei, daß $\mu(A_\iota \cap A_j) = 0$ für $\iota \neq j$, $\iota,j \in I$).

Wir haben dann für $m \in \mathbb{N}$, da wir o.E. $\sup_{f\in K} \|f\| \leq 1$ angenommen haben:

$$1 \geq \langle \phi, \sum_{n=1}^{m} \tilde{e}_{A_{\iota_n}}(g_{\iota_n})\rangle = \sum_{n=1}^{m} \langle \phi^{A_{\iota_n}},g_{\iota_n}\rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \langle f_{\iota_n},g_{\iota_n}\rangle \geq \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} \|f_{\iota_n}\|_{L_1(\mu_{|A_{\iota_n}},X)}$$

und damit einen Widerspruch zur Annahme.

Also können wir $f := \sum_{\iota\in I} e_{A_\iota}(f_\iota)$ in $L_1(\mu,X)$ definieren. Es bleibt zu zeigen, daß für alle $g \in L_\infty^c(\mu,X')$ gilt:

$$\langle \phi,g\rangle = \langle f,g\rangle \quad .$$

Aufgrund der Dichtheit von $L_\infty^e(\mu,X')$ in $L_\infty^c(\mu,X')$ genügt es dies für $g \in L_\infty^c(\mu,X')$ mit $g = g\,\chi_B$, $B \in \Sigma_e$ nachzuweisen.

Nach (3) sei $f_B \in L_1(\mu_{|B},X)$ derart, daß für alle $\tilde{g} \in L_\infty(\mu_{|B},X')$

$$<\phi^B,\tilde{g}> = <f_B,\tilde{g}> = <e_B(f_B),\tilde{e}_B(\tilde{g})>.$$

Nun gilt aber auch:

$$\begin{aligned} <\phi,g> = <\phi,g\,\chi_B> &= <\phi^B,\tilde{R}_B(g)> \\ &= <f_B,\tilde{R}_B(g)> \\ &= <e_B(f_B),g> \quad . \end{aligned}$$

Ist nun $\iota_0 \in \{\iota \in I;\ \mu(A_\iota \cap B) > 0\}$, so folgt:

$$\begin{aligned} <f,g\,\chi_{A_{\iota_0}}> &= <\phi^{A_{\iota_0}},\tilde{R}_{A_{\iota_0}}(g)> \\ &= <\ \phi\ ,g\,\chi_{A_{\iota_0}}> \\ &= <\ \phi^B\ ,\tilde{R}_B(g\,\chi_{A_{\iota_0}})> \\ &= <\ f_B\ ,\tilde{R}_B(g\,\chi_{A_{\iota_0}})> \\ &= <e_B(f_B),g\,\chi_{A_{\iota_0}}> \end{aligned}$$

Also ist für alle $\iota_0 \in \{\iota \in I;\ \mu(A_\iota \cap B) > 0\}$

$$<f\,\chi_{A_{\iota_0}},g> = <e_B(f_B)\chi_{A_{\iota_0}},g> .$$

Aufgrund der Eigenschaft von $L_1(\mu,X)$ gilt dann:

$$\begin{aligned} <f,g> = \sum_{\substack{\iota \in I \\ \mu(B\cap A_\iota)>0}} <f\,\chi_{A_\iota},g> &= \sum_{\substack{\iota \in I \\ \mu(B\cap A_\iota)>0}} <e_B(f_B)\chi_{A_\iota},g> \\ &= <e_B(f_B),g> = <\phi,g> \end{aligned}$$

Also haben wir insgesamt: $<\phi,g> = <f,g>$. □

(2.1.5.) Bemerkung: Wie schon erwähnt, ist es unser Ziel, zu zeigen, daß $(L_1(\mu,X),\sigma')$ für einen beliebigen positiven Maßraum (1.3.3.5.) angelisch ist, und daß jede σ'-kompakte Menge ein Eberlein-Kompaktum darstellt.

Die Bedingung c) ist nun i.a. nicht hinreichend für die σ'-Kompaktheit einer Teilmenge $K \subset L_1(\mu,X)$. Man sieht dies schon an einem einfachen Beispiel: Ist $X = \mathbb{R}$ und $(S,\Sigma,\mu) = (\mathbb{N},\mathrm{Pot}(\mathbb{N}),\mu)$, wobei μ das Zählmaß ist, dann ist $L_1(\mu) = \ell_1, L_\infty(\mu) = \ell_\infty$ und $B(\ell_1)$ erfüllt die Bedingung c). (Aber $B(\ell_1)$ ist bekanntlich nicht schwach kompakt.) Deshalb wählen wir den Umweg über die σ'_c-Topologie, denn haben wir gezeigt, daß $(L_1(\mu,X),\sigma'_c)$ angelisch ist, so können wir mit dem "Angelic-Theorem" [21, S.31, 3.3] schließen, daß $(L_1(\mu,X),\sigma')$ angelisch ist.

Der folgende Satz wird nun die angestrebten Ergebnisse formulieren. Er verallgemeinert insbesondere [5, S.244, Cor. 1].

(2.1.6.) Satz: Es sei (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.).

a) Ist $K \subset L_1(\mu,X)$ σ'_c-kompakt und $L := \overline{\mathrm{span}}\, K^{\sigma'_c}$, dann gibt es eine Menge Γ und einen linearen, beschränkten und injektiven Operator $T : L \to c_0(\Gamma)$, der σ'_c-$\sigma(c_0(\Gamma),\ell_1(\Gamma))$ und σ'-$\sigma(c_0(\Gamma),\ell_1(\Gamma))$-stetig ist mit $\|T\| \leq 1$. Insbesondere ist jede σ'_c-kompakte Teilmenge und somit jede σ'-kompakte Teilmenge ein Eberlein-Kompaktum.

b) $(L_1(\mu,X),\sigma'_c)$ und $(L_1(\mu,X),\sigma')$ sind angelisch.

<u>Beweis:</u> Wir benutzen erneut die Familie

$(A_\iota)_{\iota\in I} \subset \Sigma_e$ aus Lemma (2.1.2. a)).

Für $\iota \in I$ ist die Abbildung $R_{A_\iota} : L_1(\mu,X) \to L_1(\mu_{|A_\iota},X)$ σ'_c-σ'_{A_ι}-stetig (und damit auch σ'-σ'_{A_ι}-stetig). Also ist für $\iota \in I$

$\overline{R_{A_\iota}(L)}^{\sigma'_{A_\iota}} = \overline{\text{span}}^{\sigma'_{A_\iota}} R_{A_\iota}(K)$ ein σ'_{A_ι}-kompakt erzeugter Teilraum von $L_1(\mu_{|A_\iota},X)$. Nach [5, S. 241, Main Theorem] existiert nun eine Menge Γ_ι und ein linearer, beschränkter, injektiver und σ'_{A_ι}-$\sigma(c_0(\Gamma_\iota),\ell_1(\Gamma_\iota))$-stetiger Operator $T_\iota : \overline{R_{A_\iota}(L)}^{\sigma'_{A_\iota}} \to c_0(\Gamma_\iota)$ mit $\|T_\iota\| \leq 1$.

Wir definieren $\Gamma := \dot{\bigcup}_{\iota\in I} \Gamma_\iota$ (o.E. die $(\Gamma_\iota)_{\iota\in I}$ paarweise disjunkt) und bilden die lineare Abbildung

$T : L \to c_0(\Gamma)$ mit

$(Tf)(\gamma) := (T_\iota \circ R_{A_\iota})(f)(\gamma)$ falls $\gamma \in \Gamma_\iota$.

Für $f \in L$ ist $((Tf)(\gamma))_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$, denn nach Lemma (2.1.2. b)) ist zu einem $\varepsilon > 0$ die Menge $\{\iota \in I; \|R_{A_i} f\| \geq \varepsilon\}$ endlich.

Nun ist $\|T_\iota\| \leq 1$ für $\iota \in I$ und $T_\iota : \overline{R_{A_\iota}(L)}^{\sigma'_{A_\iota}} \to c_0(\Gamma_\iota)$, so daß $\{\gamma \in \Gamma; |(Tf)(\gamma)| \geq \varepsilon\}$ endlich ist.

Für alle $\iota \in I$ ist T_ι injektiv, deshalb folgt aus $Tf = 0$ $R_{A_\iota} f = 0$ für alle $\iota \in I$. Berücksichtigt man Lemma (2.1.2. b)), so ergibt sich $f = 0$.

- Wir haben für alle $\iota \in I$ $\|T_\iota\| \leq 1$ und $\|R_{A_\iota}\| \leq 1$, deshalb muß auch $\|T\| \leq 1$ gelten.

T ist $\sigma'_c \cap L$-$\sigma(c_0(\Gamma),\ell_1(\Gamma))$-stetig:

Wir zeigen: Ist $b = (b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \ell_1(\Gamma)$, so gibt es ein $g \in L^c_\infty(\mu,X')$ mit $\langle Tf,b\rangle = \langle f,g\rangle$ für alle $f \in L$.

Zu $b = (b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \ell_1(\Gamma)$ existiert eine Folge $(\Gamma_{l_j})_{j\in\mathbb{N}}$ derart, daß für $\gamma \notin \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Gamma_{l_j}$ $b_\gamma = 0$ gilt.

Für $f \in L_1(\mu,X)$ haben wir dann:

$$<Tf,b> = \sum_{j=1}^{\infty} <(T_{l_j} \circ R_{A_{l_j}})(f), b_{|\Gamma_{l_j}}>$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} <R_{A_{l_j}}(f), T^*_{l_j}(b_{|\Gamma_{l_j}})>$$

Aus [5, S.241 Main Theorem] ergibt sich für $j \in \mathbb{N}$:

Es gibt ein $g_j \in L_\infty(\mu_{|A_{l_j}},X')$ mit $\|g_j\|_\infty \le \|b_{|\Gamma_{l_j}}\|_{\ell_1(\Gamma_{l_j})}$ derart, daß

für alle $f_j \in \overline{R_{A_{l_j}}(L)}^{\sigma'_{A_{l_j}}}$ gilt: $<T_{l_j} f_j, b_{|\Gamma_{l_j}}> = <f_j,g_j>$.

Damit ist $R^*_{A_{l_j}}(g_j) \in L^c_\infty(\mu,X')$ und $\|R^*_{A_{l_j}}(g_j)\|_\infty \le \|b_{|\Gamma_{l_j}}\|_{\ell_1(\Gamma_{l_j})}$.

Wir haben für $n,m \in \mathbb{N}$, $n \ge m$

$$\|\sum_{j=m}^{n} R^*_{A_{l_j}}(g_j)\|_\infty \le \sum_{j=m}^{n} \|R^*_{A_{l_j}}(g_j)\|_\infty \le \sum_{j=m}^{n} \|b_{|\Gamma_{l_j}}\|_{\ell_1(\Gamma_{l_j})}$$

$$= \|\sum_{j=m}^{n} b_{|\Gamma_{l_j}}\|_{\ell_1(\Gamma)} .$$

Damit bildet $\left(\sum_{j=1}^{n} R^*_{A_{l_j}}(g_j)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(L^c_\infty(\mu,X'), \|\cdot\|_\infty)$.

und es existiert $g := \sum_{j=1}^{\infty} R^*_{A_{l_j}}(g_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{e}_{A_{l_j}}(g_j)$ in $(L^c_\infty(\mu,X'), \|\cdot\|_\infty)$.

Für dieses $g \in L_\infty(\mu,X')$ hat man:

$$<Tf,b> = \sum_{j=1}^{\infty} <R_{A_{l_j}}(f),g_j> = <f,g> .$$

Damit ist T $\sigma'_c \cap L - \sigma(c_0(\Gamma),\ell_1(\Gamma))$ - stetig, also insbesondere auch $\sigma' \cap L - \sigma(c_0(\Gamma),\ell_1(\Gamma))$ - stetig. Da T zusätzlich injektiv ist, bildet $T_{|K}$ einen $\sigma'_c \cap K - \sigma(c_0(\Gamma),\ell_1(\Gamma))$ - Homöomorphismus und K ist ein Eberlein-Kompaktum.

b) Jede relativ σ'_c-abzählbar kompakte Teilmenge $K \subset L_1(\mu,X)$ ist nach Lemma (2.1.3.) auch relativ σ'_c-kompakt.

Mit Teil a) stellt $\overline{K}^{\sigma'_c}$ ein Eberlein-Kompaktum dar. Nach der Definition eines Eberlein-Kompaktums ergibt sich ii) in der Definition (1.2.3.) von angelischen Räumen, denn Banachräume sind in der schwachen Topologie angelisch (vgl. [21, S.39, (1)]). Damit wissen wir, daß $(L_1(\mu,X),\sigma'_c)$ angelisch ist. Wenn man berücksichtigt, daß nach (1.2.1.) $(L_1(\mu,X),\sigma')$ regulär ist, so ist mit dem "Angelic-Theorem" [21, S.31, 33.(2)] auch $(L_1(\mu,X)\sigma')$ angelisch (dazu beachte man: id: $(L_1(\mu,X),\sigma') \to (L_1(\mu,X),\sigma'_c)$ ist stetig). □

Der vorangegangene Satz stellt ein Analogon zu dem bekannten Ergebnis für schwach kompakt erzeugte Banachräume von D. Amir - J. Lindenstrauß dar [1].

Aus Satz (2.1.6.) lassen sich nun zwei geometrische Aussagen ableiten, die wir für die σ'-Topologie im 3. und 4. Paragraphen verschärfen können (vgl. Satz (3.15 b) ii)) bzw. Korollar (4.6.3.)).

<u>(2.1.7.) Korollar:</u> Es sei (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.) und $K \subset L_1(\mu,X)$ σ'_c-kompakt. Dann gilt:

a) Auf $L := \overline{\text{span}}^{\sigma'_c} K$ existiert eine zu $\|\cdot\|_1$ äquivalente strikt konvexe Norm.

b) Ist K zusätzlich konvex, $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ und

$$\exp K := \{f \in K;\ \text{es gibt } g \in L^c_\infty(\mu,X'),\ \text{so daß für alle } \tilde{f} \in K \quad \tilde{f} \neq f : \langle \tilde{f},g\rangle < \langle f,g\rangle\},$$

so gilt: $K = \overline{\text{co}}^{\sigma'_c}(\exp K)$.

Beweis:

a) Dieser Teil folgt sofort aus Satz (2.1.6.) und [13, S.101, Cor.11].

b) Es sei $T : \overline{\mathrm{span}}^{\sigma' c} K \to c_0(\Gamma)$ aus Satz (2.1.6.) gewählt. Nach [1, S.38, Th. 4] gilt für

$$\exp T(K) := \{x \in T(K);\ \text{es gibt ein } b \in \ell_1(\Gamma),\ \text{so daß für alle } y \in T(K) \quad x \neq y : \langle y,b\rangle < \langle x,b\rangle\}$$

$T(K) = \overline{\mathrm{co}}\,(\exp(T(K)))$. Da T $\sigma'_c - \sigma(c_0(\Gamma),\ell_1(\Gamma))$-stetig ist, hat man $\exp(T(K)) \subset T(\exp K)$. Berücksichtigt man zusätzlich, daß $T_{|K}$ ein $\sigma' \cap K - \sigma(c_0(\Gamma),\ell_1(\Gamma)) \cap T(K)$-Homöomorphismus ist, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} K = T^{-1}(T(K)) = T^{-1}(\overline{\mathrm{co}}(\exp T(K))) &= \overline{\mathrm{co}}^{\sigma' c}\left(T^{-1}(\exp(T(K)))\right) \\ &\subset \overline{\mathrm{co}}^{\sigma' c}\left(T^{-1}\, T(\exp(K))\right) \\ &= \overline{\mathrm{co}}^{\sigma' c}(\exp(K)) = K . \end{aligned}$$

□

Wir zeigen nun, daß σ'-kompakte Teilmengen einen σ-finiten Träger besitzen.

(2.1.8.) Lemma: Für einen Maßraum gemäß (1.3.3.5.) und eine relativ σ'-kompakte Teilmenge gilt: Es gibt $S' \in \Sigma$ derart, daß $(S',\Sigma \cap S',\mu_{|\Sigma \cap S'})$ σ-finit ist und für alle $f \in K$ gilt: $f\,\chi_{\complement S'} = 0$.

Beweis: Wir wählen eine maximale Familie $(A_\iota)_{\iota \in I} \subset \Sigma$ gemäß Lemma (2.1.2. a)) und nehmen an, es gibt eine überabzählbare Teilmenge $I' \subset I$, so daß für alle $\iota \in I'$ ein $f_\iota \in K$ existiert mit $\|f_\iota\,\chi_{A_\iota}\|_1 > 0$. Dann findet man ein $\varepsilon > 0$ und eine überabzählbare Teilmenge $I'' \subset I'$, so daß $\|f_\iota\,\chi_{A_\iota}\| > \varepsilon$ für $\iota \in I''$ gilt.

Durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ wollen wir folgende Aussage beweisen:

Es gibt überabzählbare Teilmengen $I_0,\dots,I_n \subset I''$ mit $I_j \supset I_{j+1}$ $(0 \leq j \leq n-1)$ und $\iota_1,\dots,\iota_n \in I''$ mit $\iota_{j+1} \in I_j$ $(0 \leq j \leq n-1)$, so daß:

(1) Für alle $j,k \in \{1,\dots,n\}$, $j < k$: $\|f_{\iota_j} \chi_{A_{\iota_k}}\|_1 = 0$.

(2) Für alle $j,k \in \{1,\dots,n\}$, $j \leq k$ und für alle

$$\iota \in I_k : \|f_\iota \chi_{A_{\iota_j}}\|_1 < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} .$$

Induktionsanfang: $n = 1$: Setze $I_0 := I''$.

Dann gibt es ein $\iota_1 \in I''$, so daß $\{\iota \in I'', \|f_\iota \chi_{A_{\iota_1}}\|_1 < \frac{\varepsilon}{4}\}$ überabzählbar ist, denn ansonsten wähle eine Folge $(\tilde{\iota}_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset I''$, für die gilt: Die Mengen $\{\iota \in I''; \|f_\iota \chi_{A_{\tilde{\iota}_m}}\|_1 < \frac{\varepsilon}{4}\}$ sind für $m \in \mathbb{N}$ abzählbar.

Dann existiert (I'' ist überabzählbar) ein $\tilde{\iota} \in I''$, so daß für alle $m \in \mathbb{N}$ $\|f_{\tilde{\iota}} \chi_{A_{\iota_m}}\|_1 \geq \frac{\varepsilon}{4}$. Nun gilt nach der Wahl der Familie $(A_\iota)_{\iota\in I}$:

$\mu(A_\iota \cap A_{\iota'}) = 0$ falls $\iota \neq \iota'$, wodurch der Widerspruch zu $f \in L_1(\mu,X)$ hergestellt ist.

Setzt man $I_1 := \{\iota \in I_0; \|f_\iota \chi_{A_{\iota_1}}\|_1 < \frac{\varepsilon}{4}\}$, so ist I_1 überabzählbar und (1) bzw. (2) sind erfüllt.

Induktionsschritt: Es seien für ein $n \in \mathbb{N}$ $I_0,\dots,I_n$ bzw. $\iota_1,\dots,\iota_n$ bereits konstruiert, so daß (1) bzw. (2) gilt.

Induktionsschluß: Es sei $\tilde{I}_n := \bigcup_{j=1}^{n} \{\iota \in I''; \|f_{\iota_j} \chi_{A_\iota}\|_1 > 0\}$. $\tilde{I}_n$ ist nach Lemma (2.1.2.) abzählbar, und somit ist $I_n \setminus \tilde{I}_n$ überabzählbar. Wir können nun ein $\iota_{n+1} \in I_n \setminus \tilde{I}_n$ wählen, so daß

$\{\iota \in I_n \setminus \tilde{I}_n; \|f_\iota \chi_{A_{\iota_{n+1}}}\|_1 < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\}$ überabzählbar ist. Denn sonst findet man an analog zum Induktionsanfang ein $\tilde{\iota} \in I_n \setminus \tilde{I}_n$ und eine Folge

eine Folge $(\iota_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset I_n \setminus \tilde{I}_n$, so daß $\|f_{\tilde{\iota}}\, \chi_{A_{\iota_m}}\|_1 \geq \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$. Dies steht aber im Widerspruch zu Lemma (2.1.2. b)). Setze nun $I_{n+1} := \{\iota \in I_n \setminus \tilde{I}_n;\ \|f_\iota\, \chi_{A_{\iota_{n+1}}}\|_1 < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\}$. Dann ist $I_{n+1} \subset I_n$ überabzählbar und (1) bzw. (2) sind erfüllt.

Wir betrachten die konstruierte Folge $(\iota_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I''$. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n \in L_\infty(\mu|_{A_{\iota_n}}, X')$ gemäß (1.3.4.1.) mit $\|g_n\|_\infty \leq 1$ und $|\langle f_{\iota_n}, \tilde{e}_{A_{\iota_n}}(g_n)\rangle| > \varepsilon$ gewählt. K ist relativ σ'-kompakt vorausgesetzt, also gibt es nach Satz (2.1.6.) ($(L_1(\mu,X), \sigma')$ ist angelisch) eine Teilfolge $(f_{\iota_{n_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_{\iota_n})_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $f \in L_1(\mu,X)$ so daß $f_{\iota_{n_k}} \xrightarrow[\sigma']{k\to\infty} f$ konvergiert. Wir setzen nun $A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{\iota_{n_k}}$ und $g := \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{e}_{A_{\iota_{n_k}}}(g_{n_k})$. Es gilt natürlich $f_{\iota_{n_k}}\, \chi_A \xrightarrow[\sigma']{k\to\infty} f\, \chi_A$. Für $k \in \mathbb{N}$ haben wir

$$|\langle f_{\iota_{n_k}} \chi_A, g\rangle| = |\langle f_{\iota_{n_k}}, g\rangle| = |\langle f_{\iota_{n_k}}, \tilde{e}_{A_{\iota_{n_k}}}(g_{n_k})\rangle + \sum_{j=1}^{k-1} \langle f_{\iota_{n_k}}, \tilde{e}_{A_{\iota_{n_j}}}(g_{n_j})\rangle|$$

(aufgrund von (1))

$$\geq \varepsilon - \sum_{j=1}^{k-1} |\langle f_{\iota_{n_k}}, \tilde{e}_{A_{\iota_{n_j}}}(g_{n_j})\rangle| \geq \varepsilon - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\varepsilon}{2^{n_j+1}} > \frac{\varepsilon}{2}$$

(3) Also ist $\|f\, \chi_A\|_1 > \frac{\varepsilon}{2}$. Andererseits gilt für $j \in \mathbb{N}$ und $\bar{g} \in B(L_\infty(\mu|_{A_{\iota_{n_j}}}, X'))$:

$$|\langle f\, \chi_{A_{\iota_{n_j}}}, \tilde{e}_{A_{\iota_{n_j}}}(\bar{g})\rangle| = \lim_{k\to\infty} |\langle f_{\iota_{n_k}} \chi_{A_{\iota_{n_j}}}, \tilde{e}_{A_{\iota_{n_j}}}(\bar{g})\rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2^{n_j+1}}$$

Betrachtet man die Isometrie J aus Lemma (2.1.2.), so gilt:

$$\|J(f\,\chi_A)\| = \sum_{j=1}^{\infty} \|R_{A_{i_{n_j}}}(f\,\chi_A)\|_1 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n_j+1}} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ also}$$

$\|f\,\chi_A\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dies steht aber im Widerspruch zu (3). □

Nach (1.3.4.2.) wissen wir, daß die σ'-Topologie gröber ist als die schwache Topologie. Somit erhält man sofort das folgende Korollar.

<u>(2.1.9.) Korollar:</u> Ist (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.) und $K \subset L_1(\mu,X)$ relativ schwach kompakt, dann gibt es eine Menge $S' \in \Sigma$, so daß $(S',\Sigma \cap S',\mu_{|S'})$ σ-finit ist und $f\,\chi_{\complement S'} = 0$ für alle $f \in K$.

Am Ende dieses Abschnittes wollen wir uns mit einer Charakterisierung relativ σ'-kompakter Teilmengen beschäftigen. Dabei werden wir relativ σ'-kompakte Teilmengen durch bestimmte Klassen von linearen, beschränkten Operatoren $T : L_1(\mu,X) \to c_0$ bestimmen.

<u>(2.1.10.) Definition:</u> Es sei (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.). Wir definieren folgende Klassen von Operatoren:

(2.1.10.1.) Für $A \in \Sigma_e$ sei

$$\Lambda_0^A(c_0) := \Big\{T \in L\big(L_1(\mu,X),c_0\big);\ \text{es gibt ein } g \in B\big(L_\infty(\mu,X')\big) \text{ und eine Folge } (A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_e \text{ mit } A_{k+1} \subset A_k \subset A \text{ für } k \in \mathbb{N} \text{ und } \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A = \emptyset, \text{ so daß für } f \in L_1(\mu,X) \text{ gilt: } Tf = \Big(\int_{A_k} \langle f,g\rangle\, d\mu\Big)_{k\in\mathbb{N}}\Big\}$$

(2.1.10.2.) Ist $A \in \Sigma_e$ so legen wir weiter fest:

$$\Lambda_1^A(c_0) := \Big\{T \in L(L_1(\mu,X),c_0);\ \text{es gibt eine aufsteigende Folge endlicher } \Sigma\text{-Zerlegungen } (\pi_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ von } A \text{ und eine Folge } (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(L_\infty(\mu_{|A},X')) \text{ mit } g_n = (\mathbf{E}_{\pi_{n+1}} - \mathbf{E}_{\pi_n})(g_n)\ (n \in \mathbb{N}) \text{ derart, daß } Tf = (\langle R_A f, g_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}\ (f \in L_1(\mu,X))\Big\}$$

(2.1.10.3.) Bildet $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_e$ eine aufsteigende Folge, und ist $C := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$, so definiere man:

$$\Lambda_2(c_0,(C_n)) := \Big\{T \in L(L_1(\mu,X),c_0);\ \text{es gibt eine Folge } (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(L_\infty(\mu,X')) \text{ mit } g_n = g_n\,\chi_{C\setminus C_n}\ (n \in \mathbb{N}),\ \text{so daß für } f \in L_1(\mu,X) : Tf = (\langle f,g_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}\Big\}$$

bzw. $\Lambda_2(c_0) := \cup\, \Lambda_2(c_0,(C_n))$, wobei sich die Vereinigung über alle aufsteigenden Folgen $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_e$ erstreckt.

<u>(2.1.11.) Bemerkung:</u>

i) Die Operatorenklassen $\Lambda_0^A(c_0)$ bzw. $\Lambda_1^A(c_0)$ wurden von W. Hiermeyer eingeführt (vgl. [28, S.73, 4.8 Lemma] bzw. [28, S.76, 4.11 Lemma]). Für alle $T \in \Lambda_0^A(c_0) \cup \Lambda_1^A(c_0)$ gilt $\|T\| \leq 1$ und T ist σ'-$\sigma(c_0,\ell_1)$-stetig.
((vgl. hierzu [28, S.73, Lemma 4.8 bzw. S.76 Lemma 4.11]) und beachte, daß für $A \in \Sigma_e$ R_A σ'-σ'_A-stetig ist.)

ii) Ist $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_e$ eine aufsteigende Folge, $C := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ so gilt für $T \in \Lambda_2(c_0,(C_n))$:
$\|T\| \leq 1$ und T ist σ'-$\sigma(c_0,\ell_1)$-stetig, <u>denn:</u> $\|T\| \leq 1$ ist klar. Wählt man $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, so existiert aufgrund der

Definition von T $g := \sum_{n=1}^{\infty} b_n g_n$ in $(L_\infty(\mu,X'),\|\cdot\|_\infty)$. Also hat man für $f \in L_1(\mu,X')$ $\langle f,T^*b\rangle = \langle Tf,b\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \langle f,g_n\rangle = \langle f,g\rangle$, und somit gilt für den adjungierten Operator $T^*(\ell_1) \subset L_\infty(\mu,X')$. Die Aussage folgt mit (1.2.2.).

<u>(2.1.12.) Satz:</u> (S,Σ,μ) sei ein Maßraum gemäß (1.3.3.5.), dann gilt:

I) Ist $K \subset L_1(\mu,X)$ relativ σ'-kompakt, so ist $T(K)$ relativ normkompakt in c_0 für alle $T \in \Lambda_2(c_0)$.

II) Für eine Teilmenge $K \subset L_1(\mu,X)$ sind äquivalent:

a) K ist relativ σ'-kompakt.

b) K ist relativ σ'-folgenkompakt.

c) i) K ist beschränkt.

ii) Für alle $A \in \Sigma_e$ ist $I_A(K)$ relativ schwach kompakt.

iii) Für alle $A \in \Sigma_e$ und $T \in \Lambda_0^A(c_0) \cup \Lambda_1^A(c_0)$ ist $T(K)$ relativ schwach kompakt in c_0.

iv) Für alle $T \in \Lambda_2(c_0)$ ist $T(K)$ relativ schwach kompakt in c_0.

<u>Beweis:</u> I) Es seien $K \subset L_1(\mu,X)$ relativ σ'-kompakt und $T \in \Lambda_2(c_0)$. K ist nach Satz (2.1.5.) auch relativ σ'-folgenkompakt (in angelischen Räumen sind relativ kompakte Teilmengen auch relativ folgenkompakt, vgl. hierzu [21, S.31, Theorem]). Nehmen wir an, daß $T(K)$ nicht relativ normkompakt ist, dann findet man ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ mit

(1) $\|Tf_m - Tf_k\|_\infty > \varepsilon$ $(k,m \in \mathbb{N},\ k \neq m)$.

Da K relativ σ'-folgenkompakt ist, sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bereits σ'-konvergent (sonst gehe man zu einer Teilfolge über).

Setzt man $C := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$, $((C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß der Definition von $T)$, so ist

auch $(f_k \chi_C)_{k\in\mathbb{N}}$ σ'-konvergent und nach Definition von T $\|T((f_{k+1} - f_k)\chi_C)\|_\infty > \varepsilon$ $(k \in \mathbb{N})$. Deshalb nehmen wir an:

(2) $R_{S\setminus C}(f_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Ferner sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(L_\infty(\mu,X'))$ zu $T \in \Lambda_2(c_0,(C_n)_{n\in\mathbb{N}})$ gewählt.

Durch Induktion konstruieren wir streng monoton wachsende Folgen $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$, so daß für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $(m_0 := 0)$:

(3) $m_{j-1} < n_j < m_j$

(4) $|\langle f_{k_j+1} - f_{k_j}, g_{n_j} \chi_{C_p}\rangle| > \frac{3}{4}\varepsilon$ für $p \geq m_j$

(5) $|\langle f_{k_j+1} - f_{k_j}, g_i \chi_{C_r\setminus C_i}\rangle| < \frac{\varepsilon}{4(m_{j-1}+1)}$ für $1 \leq i < r \leq m_{j-1}$

(6) $\|(f_{k_j+1} - f_{k_j})\chi_{C\setminus C_{m_j}}\|_1 < \frac{\varepsilon}{4}$

<u>Induktionsanfang: $j = 1$:</u> Man setze $k_1 := 1$. Dann gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß man nach (1) $|\langle f_2 - f_1, g_{n_1}\rangle| > \varepsilon$ hat. Berücksichtigt man (2), so findet man ein $m_1 > n_1$ mit $\|(f_2 - f_1)_{C\setminus C_{m_1}}\| < \frac{\varepsilon}{4}$.

<u>Induktionsannahme:</u> Es sei für ein $j \in \mathbb{N}$ $k_1,\ldots, k_j$, $m_0,\ldots, m_j$ und $n_1,\ldots, n_j$ bereits konstruiert.

<u>Induktionsschluß:</u> Da $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine σ'-Cauchy-Folge ist, gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geq k_0$ und $i,r \in \{1,\ldots, m_j\}$, $i < r$:

$|\langle f_{k+1} - f_k, g_i \chi_{C_r\setminus C_i}\rangle| < \frac{\varepsilon}{4(m_j+1)}$ und $|\langle f_{k+1} - f_k, g_r\rangle| < \varepsilon$

Setze nun $k_{j+1} := \max(k_0,k_j+1)$, so findet man nach (1) ein $n_{j+1} > m_j$ derart, daß

$$|\langle f_{k_{j+1}+1} - f_{k_{j+1}}, g_{n_{j+1}}\rangle| > \varepsilon \quad .$$

(2) impliziert sodann, daß ein $m_{j+1} > n_{j+1}$ existiert mit

$$\|(f_{k_{j+1}+1} - f_{k_{j+1}})\chi_{C\setminus C_{m_{j+1}}}\|_1 < \frac{\varepsilon}{4} \quad .$$

Dies bedeutet nun für $p \geq m_{j+1}$:

$$|\langle f_{k_{j+1}+1} - f_{k_{j+1}}, g_{n_{j+1}} \chi_{C_p}\rangle| =$$

$$|\langle f_{k_{j+1}+1} - f_{k_{j+1}}, g_{n_{j+1}} (\chi_{C_p} - \chi_{C_{n_{j+1}}})\rangle| \geq$$

$$|\langle f_{k_{j+1}+1} - f_{k_{j+1}}, g_{n_{j+1}} (\chi_C - \chi_{C_{n_{j+1}}})\rangle| -$$

$$|\langle f_{k_{j+1}+1} - f_{k_{j+1}}, g_{n_{j+1}} (\chi_C - \chi_{C_p})\rangle| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3}{4}\varepsilon .$$

Wir definieren $g := \sum_{i=1}^{\infty} g_{n_i} \chi_{C_{n_{i+1}} \setminus C_{n_i}}$ in $L_\infty(\mu, X')$

und erhalten für $j \geq 2$

$$(7) \quad |\langle f_{k_j+1} - f_{k_j}, g\rangle| \geq |\langle f_{k_j+1} - f_{k_j}, g_{n_j} \chi_{C_{n_{j+1}} \setminus C_{n_j}}\rangle| -$$

$$|\langle f_{k_j+1} - f_{k_j}, \sum_{p=1}^{j-1} g_{n_p} \chi_{C_{n_{p+1}} \setminus C_{n_p}}\rangle| -$$

$$\sum_{i=j+1}^{\infty} \|(f_{k_j+1} - f_{k_j})\chi_{C_{n_{i+1}} \setminus C_{n_i}}\|_1$$

(nach (4) und (5)) $\quad > \frac{\varepsilon}{4}\varepsilon - \sum_{p=1}^{j-1} \frac{\varepsilon}{4(m_{j-1}+1)} - \|(f_{k_j+1} - f_{k_j})\chi_{C \setminus C_{n_{j+1}}}\|_1$

(nach (6)) $\quad > \frac{3}{4}\varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{4}$

Wenn man nun für $i \in \mathbb{N}$

$\tilde{f}_i := f_{k_j}$ falls $i = 2j$ und

$\tilde{f}_i := f_{k_j+1}$ falls $i = 2j + 1$ setzt, so bildet $(\tilde{f}_i)_{i\in\mathbb{N}}$

eine Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die nach (7) keine σ'-Cauchy-Folge darstellt. Dies widerspricht aber der Voraussetzung.

II) Die Äquivalenz von a) und b) gilt allgemein in angelischen Räumen (vgl. Satz (2.1.6.) und [21, S.31, Theorem]).

a) ⇒ c): Da K relativ σ'-kompakt ist, erhält man c) i) - iv) aufgrund der entsprechenden σ'-Stetigkeiten der linearen Operatoren I_B, $T \in \Lambda_0^B(c_0) \cup \Lambda_1^B(c_0)$ $(B \in \Sigma_e)$ und $T \in \Lambda_2(c_0)$.

c) ⇒ b): Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \bar{K}^{\sigma'}$ eine beliebige Folge. Dann findet man mit (1.3.6.3.) eine Folge paarweise disjunkter Elemente $(A_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_e$, so daß für $A := \bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p$ $R_{S\setminus A}(f_m) = 0$ $(m \in \mathbb{N})$. Nach der Voraussetzung c) i) - iii) und [4, S.411, Th. 2.1.] ist $R_{A_p}(K)$ für alle $p \in \mathbb{N}$ relativ σ'_{A_p}-folgenkompakt. Somit findet man ein $f^1 \in L_1(\mu,X)$, $f^1 = f\,\chi_{A_1}$ und eine Teilfolge $(f_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, daß $f_n^1\,\chi_A \xrightarrow[\sigma']{n\to\infty} f^1$ gilt. Induktiv wähle man für ein $k \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge $(f_n^{k+1})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $f^{k+1} \in L_1(\mu,X)$ mit $f^{k+1} = f^{k+1}\,\chi_{A_{k+1}}$, so daß für $p \leq k+1$ $f_n^{k+1}\,\chi_{A_p} \xrightarrow[\sigma']{n\to\infty} f^p$. Mit Hilfe des Diagonalverfahrens konstruiere man sich eine Teilfolge $(f_{n_j})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$

$$f_{n_j}\,\chi_{A_k} \xrightarrow[\sigma']{j\to\infty} f^k \text{ gilt.}$$

Es ist $(\|f^k\|_1)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, denn mit der normierenden Eigenschaft von $L_\infty(\mu,X')$ finden wir für $m \in \mathbb{N}$ ein $g \in B(L_\infty(\mu,X'))$ $g = g\,\chi_{\bigcup_{k=1}^m A_k}$ mit $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m \|f^k\|_1 \leq |\langle \sum_{k=1}^m f^k, g\rangle|$. Nach Konstruktion der Teilfolge gilt:

$$\langle f_{n_j}, g\rangle = \langle f_{n_j}\,\chi_{\bigcup_{k=1}^m A_k}, g\rangle \xrightarrow{j\to\infty} \langle \sum_{k=1}^m f^k, g\rangle$$

Damit hat man $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \|f^k\|_1 \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \|f_{n_j}\|_1 \, \|g\|_\infty \leq \sup_{f\in K} \|f\|_1$. Also existiert $f := \sum_{k=1}^{\infty} f^k$ in $(L_1(\mu,X), \|\cdot\|_1)$, und wir nehmen $f = 0$ an (sonst betrachtet man $\tilde{f}_{n_j} := f_{n_j} - f$).

Konvergiert nun $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ nicht gegen 0 in $(L_1(\mu,X),\sigma')$, dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_{j_i}})_{i\in\mathbb{N}}$, ein $\varepsilon > 0$ und ein $g \in B(L_\infty(\mu,X'))$, so daß für alle $i \in \mathbb{N}$:

(1) $\operatorname{Re} \langle f_{n_{j_i}}, g\rangle > \varepsilon$ gilt (entsprechend für den Imaginärteil).

Zur Vereinfachung der Schreibweise nehmen wir $(f_{n_{j_i}})_{i\in\mathbb{N}} = (f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ an.

Wir konstruieren nun induktiv streng monoton wachsende Folgen $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$, so daß für $k \in \mathbb{N}$ gilt $(m_1 := 0)$:

(2) $\left|\langle f_{n_{j_k}}, g\, \chi_{\bigcup_{i=1}^{p} A_i}\rangle\right| < \frac{\varepsilon}{4}$ für $1 \leq p \leq m_{k-1}$

(3) $\left\|f_{n_{j_k}} \chi_{\bigcup_{p=m_k+1}^{\infty} A_p}\right\| < \frac{\varepsilon}{4}$ für $k \in \mathbb{N}$

<u>Induktionsanfang: $k = 1$:</u> Man setze $j_1 = 1$. Dann gibt es nach Wahl der Folge $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ ein $m_1 \in \mathbb{N}$, so daß $\left\|f_{n_1} \chi_{\bigcup_{p=m_1+1}^{\infty} A_p}\right\|_1 < \frac{\varepsilon}{4}$.

<u>Induktionsannahme:</u> Es sei für $k \in \mathbb{N}$ $j_1,\ldots, j_k \in \mathbb{N}$ bzw. $m_0,\ldots, m_k \in \mathbb{N}$ bereits konstruiert.

<u>Induktionsschluß:</u> Nach Konstruktion der Teilfolge $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ gibt es ein $j_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $j \geq j_0$ und alle $p \in \{1,\ldots, m_k\}$

(4) $\left|\langle f_{n_j} \chi_{A_p}, g\rangle\right| < \frac{\varepsilon}{4m_k}$.

Wir setzen sodann $j_{k+1} := \max(j_0, j_k + 1)$, und zu $f_{n_{j_{k+1}}}$ wählen wir ein $m_{k+1} \in \mathbb{N}$, $m_{k+1} > m_k$ derart, daß

$$\|f_{n_{k+1}} \chi_{\bigcup_{p=m_{k+1}+1}^{\infty} A_p}\|_1 < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{gilt .}$$

Mit (4) folgt für $1 \leq p \leq m_k$:

$$|\langle f_{n_{j_{k+1}}}, g\, \chi_{\bigcup_{i=1}^{p} A_i} \rangle| < \frac{\varepsilon}{4} \quad .$$

Für $k \in \mathbb{N}$ setze man $C_k := \bigcup_{p=1}^{m_k} A_p$, $C := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k$ und $g_k := g(\chi_C - \chi_{C_k})$.

Wir haben dann für $i,k \in \mathbb{N}$, $i \leq k$:

(5) $\operatorname{Re} \langle f_{n_{j_k}}, g_i \rangle \geq \operatorname{Re} \langle f_{n_{j_k}}, g \rangle - |\langle f_{n_{j_{k+1}}}, g\, \chi_{C_i} \rangle| \geq \frac{3}{4} \varepsilon$ nach (1) und (2)

bzw. für $i > k$

$$|\langle f_{n_{j_k}}, g_i \rangle| \leq \|f_{n_{j_k}} \chi_{C \setminus C_i}\|_1 < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{nach (3) .}$$

Definiert man T zu $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bzw. $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gemäß (2.1.10.3.), so haben wir, falls $(e_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \ell_1$ die Einheitsvektoren sind, mit (5):

$$\inf\{\operatorname{Re} \langle Tf_{n_{j_k}}, e_i \rangle;\ i < k\} > \frac{3}{4} \varepsilon \geq \frac{\varepsilon}{4} + \sup\{\operatorname{Re} \langle Tf_{n_{j_k}}, e_i \rangle;\ i > k\} .$$

Dies steht aber im Widerspruch zu c) iv) und dem Kompaktheitskriterium für die schwache Topologie in Banachräumen (vgl. hierzu [30, S.103, Th.1]).

□

Unmittelbar aus diesem Satz erhalten wir die nachfolgenden Korollare.

(2.1.13.) Korollar: Ist (S,Σ,μ) ein Maßraum gemäß (1.3.3.5.) und ist jede Teilmenge $C \subset X$ genau dann relativ schwach kompakt, falls für alle $\tilde{T} \in L(X,c_0)$ $T(C)$ relativ schwach kompakt ist, dann gilt: Eine Teilmenge $K \subset L_1(\mu,X)$ ist genau dann relativ σ'-kompakt, wenn für alle σ'-$\sigma(c_0,\ell_1)$-stetigen Operatoren $T \in L(L_1(\mu,X),c_0)$ $T(K)$ relativ schwach kompakt ist.

(2.1.14.) Korollar: Ist (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.) und ist K relativ σ'-kompakt, so ist auch $\operatorname{co} K$ bzw. $\operatorname{aco} K$ relativ σ'-kompakt.

Beweis: Nach Satz (2.1.12.) erfüllt K d) i) - iv). Da somit auch d) i) - iv) für $\operatorname{co} K$ bzw. $\operatorname{aco} K$ erfüllt ist, erhält man erneut mit Satz (2.1.12.) die Aussage. □

Ebenfalls aus Satz (2.1.12.), aber etwas schwieriger, läßt sich das folgende Ergebnis ableiten, das das bekannte Theorem von R.C. James (vgl. [21, S.77, Cor. 1]) für die σ'-Topologie formuliert. Wir benutzen hier nicht, wie im Theorem von R.C. James, die Quasivollständigkeit der Mackey-Topologie $\tau(L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X'))$, die wir im nächsten Paragraphen (vgl. Satz (2.2.7.)) für bestimmte Maßräume nachweisen.

(2.1.15.) Korollar: Es seien (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.), $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ und $K \subset L_1(\mu,X)$ eine beschränkte und σ'-abgeschlossene Teilmenge. Dann sind äquivalent:

a) K ist σ'-kompakt

b) Für alle $g \in L_\infty(\mu,X')$ gibt es ein $f_0 \in K$ mit

$$<f_0,g> = \sup_{f\in K} <f,g> .$$

<u>Beweis</u>: Die Implikation "a) $\Rightarrow$ b)" ist klar.

<u>b) $\Rightarrow$ a)</u>: Wir weisen d) ii) - iv) in Satz (2.1.12.) nach.

<u>"ii)"</u>: Es seien $A \in \Sigma_e$ und $x' \in X'$, dann ist aufgrund der σ'-$\sigma(X,X')$-Stetigkeit von I_A $I_A^*(x') \in L_\infty(\mu,X')$ (vgl. (1.2.2.)). Wir haben nach (b): Es gibt ein $f_0 \in K$ mit

$$<f_0,I_A^*(x')> = \sup_{f\in K} <f,I_A^*(x')> = \sup_{f\in K} <I_A(f),x'> .$$

Somit nimmt jedes Funktional $x' \in X'$ auf $I_A(K)$ sein Supremum an. Wir können nun das Theorem von R.C. James (vgl. [21, S.77, Cor. 1]) anwenden und sehen, daß $I_A(K)$ relativ schwach kompakt ist.

<u>"iii) - iv)"</u>: Wir wählen $T \in \Lambda_2(c_0) \cup \bigcup_{A\in\Sigma_e} (\Lambda_0^A(c_0) \cup \Lambda_1^A(c_0))$.

Ist $b \in \ell_1$, so haben wir aufgrund der σ'-$\sigma(c_0,\ell_1)$-Stetigkeit von T $T^*(b) \in L_\infty(\mu,X')$ (vgl. (1.2.2.)). Somit findet man nach b) ein $f_0 \in K$ mit

$$<T(f_0),b> = <f_0,T^*(b)> = \sup_{f\in K} <f,T^*(b)> = \sup_{f\in K} <T(f),b> .$$

Wie oben bedeutet dies, daß jedes Funktional $b \in \ell_1$ auf $T(K)$ sein Supremum annimmt, und $T(K)$ ist nach [21, S.77, Cor. 1] relativ $\sigma(c_0,\ell_1)$-kompakt. Nach Satz (2.1.12.) ist K relativ σ'-kompakt und, da K σ'-abgeschlossen ist, bereits σ'-kompakt. □

<u>(2.1.16.) Bemerkung</u>

a) Betrachtet man den Beweis von Satz (2.1.12), so kann in II d) iv) entfallen, falls (S,Σ,μ) ein endlicher Maßraum ist.

b) Aus dem Beweis von Satz (2.1.12.) II) sieht man, daß mit i) - iii) für jedes $A \in \Sigma_e$ $R_A(K)$ relativ σ'_A-kompakt ist. Verzichtet man auf d) iv), so erhält man sofort mit Lemma (2.1.4.) eine Charakterisierung relativ σ'_c-kompakter Teilmengen.

c) Besitzt X die RNP, so kann man auf die Operatorenklasse $\Lambda_1^A(c_0)$ für $A \in \Sigma_e$ verzichten, da sie in [4, S.411, Th. 2.1] benötigt wurden, um die Existenz der Bochnerdichte nachzuweisen (vgl. [4, S.416, Cor. 2.5.]).

d) In der Terminologie von W. Hiermeyer in [28, S.67, Def. 4.1, Bem. 4.2.] bedeutet die Aussage von Korollar (2.1.13.):
Wenn $(X,\sigma(X,X'))$ c_0-bestimmt ist, dann ist auch $(L_1(\mu,X),\sigma')$ c_0-bestimmt.

e) Korollar (2.1.13.) findet sich für einen endlichen Maßraum in [4, S.411, Th. 2.1.].

Abschließend wollen wir die Charakterisierung relativ σ'-kompakter Mengen aus Satz (2.1.12.) noch alternativ formulieren, wobei wir weitgehend auf die Verwendung von linearen, beschränkten Operatoren $T \in L(L_1(\mu,X),c_0)$ verzichten.

<u>(2.1.17.) Korollar:</u> Es seien (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.) und $K \subset L_1(\mu,X)$, dann gilt:

I) Ist K relativ σ'-kompakt, dann gibt es eine aufsteigende Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_e$, so daß $\sup_{f\in K} \|f - f\,\chi_{C_n}\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

II) Es sind äquivalent:

a) K ist relativ σ'-kompakt.

b) K ist relativ σ'-folgenkompakt.

c) K ist relativ σ'-abzählbar kompakt.

d) i) K ist beschränkt.

ii) K ist gleichgradig integrierbar.

iii) Für alle $A \in \Sigma_e$ ist $I_A(K)$ relativ schwach kompakt.

iv) Für alle $A \in \Sigma_e$ und $T \in \Lambda_1^A(c_0)$ ist $T(K)$ relativ schwach-kompakt.

v) Es gibt eine aufsteigende Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_e$ derart, daß für alle $g \in B(L_\infty(\mu,X'))$ $\sup_{f\in K} |\langle f - f\chi_{C_n}, g\rangle| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

<u>Beweis:</u> I) Mit Lemma (2.1.8.) gibt es eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_e$, so daß für $C := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

(1) $R_{S\setminus C}(f) = 0$ $(f \in K)$ gilt. Wir setzen nun für $n \in \mathbb{N}$ $C_n := \bigcup_{m=1}^{n} A_m$ und behaupten $\sup_{f\in K} \|f - f\chi_{C_n}\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Wir nehmen an, es existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, daß man für $n \in \mathbb{N}$ ein $f_n \in K$ findet, mit $\|f_n - f_n\chi_{C_n}\|_1 > \varepsilon$ $(n \in \mathbb{N})$. Aufgrund der normierenden Eigenschaft von $L_\infty(\mu,X')$ läßt sich eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(L_\infty(\mu,X'))$ auswählen mit

(2) $|\langle f_n - f_n\chi_{C_n}, g_n\rangle| > \varepsilon$ für $n \in \mathbb{N}$.

Wir konstruieren induktiv erneut streng monoton wachsende Folgen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$, so daß mit $m_0 := 1$ für $k \in \mathbb{N}$ gilt:

(3) $m_{k-1} = n_k < m_k$

(4) $|\langle f_{n_k}(\chi_C - \chi_{C_{n_k}}), g_{n_k}\rangle| > \varepsilon$

(5) $\|f_{n_k}(\chi_C - \chi_{C_{m_k}})\|_1 < \frac{\varepsilon}{4}$

<u>Induktionsanfang: $k = 1$:</u> Wir setzen $n_1 := 1$, und (4) ist nach (2) erfüllt. Mit (1) existiert ein $m_1 > 1$ derart, daß $\|f_1(\chi_C - \chi_{C_{m_1}})\|_1 < \frac{\varepsilon}{4}$ gilt, und wir haben (3) und (5).

Induktionsannahme: Für ein $k \in \mathbb{N}$ seien $n_1, \ldots, n_k$ und $m_0, \ldots, m_k$ bereits konstruiert.

Induktionsschluß: Wir setzen $n_{k+1} := m_k$ und finden nach (1) ein $m_{k+1} > n_{k+1}$, so daß $\|f_{n_{k+1}}(\chi_C - \chi_{C_{m_{k+1}}})\|_1 < \frac{\varepsilon}{4}$. Damit sind (3) - (5) erfüllt.

Wir definieren $\tilde{g}_k := g_{n_k}(\chi_C - \chi_{C_{n_k}})$ für $k \in \mathbb{N}$ und bilden hierzu $T \in \Lambda_2(c_0, (C_{n_k})_{k\in\mathbb{N}})$ gemäß (2.1.10.3.). Für $k \in \mathbb{N}$ haben wir:

$|(Tf_{n_k})_k| = |\langle f_{n_k}, g_{n_k}(\chi_C - \chi_{C_{n_k}})\rangle| > \varepsilon$ nach (4) und für $i,k \in \mathbb{N}$, $i > k$ gilt:

$|(Tf_{n_k})_i| = |\langle f_{n_k}, g_{n_i}(\chi_C - \chi_{C_{n_i}})\rangle| \leq \|f_{n_k}(\chi_C - \chi_{C_{n_i}})\|_1 < \frac{\varepsilon}{4}$ (nach (5)).

Damit folgt für $i,k \in \mathbb{N}$, $i > k$:

$\|Tf_{n_i} - Tf_{n_k}\|_\infty \geq |(Tf_{n_i})_i| - |(Tf_{n_k})_i| > \frac{\varepsilon}{2}$

Also ist $T(\{f_{n_k}; k \in \mathbb{N}\})$ nicht relativ normkompakt in c_0. Dies widerspricht aber Satz (2.1.12.) I).

II) Die Äquivalenzen von a), b) und c) gelten in angelischen Räumen (vgl. Satz (2.1.6.) bzw. [21, S.31, 3.3. (1)]).

a) $\Rightarrow$ d): i), iii) und iv) erhält man nach Satz (2.1.12), während man v) durch I) erschließt. Ist K nicht gleichgradig integrierbar, so existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$, ein $\delta > 0$ und eine Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ mit $\mu(B_n) \leq \frac{1}{n}$ derart, daß $\int_{B_n} \|f_n\| \, d\mu > \delta$.

Dann wähle man eine Teilfolge $(B_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\mu(B_{n_k}) < 2^{-k}$ $(k \in \mathbb{N})$

aus und setze $B := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{n_k}$. Da R_B σ'-σ'_B-stetig ist, ergibt sich mit [4, S.411, Th. 2.1.], daß $R_B(K)$ gleichgradig integrierbar ist, denn $B \in \Sigma_e$ und $R_B(K)$ ist relativ σ'_B-kompakt. Dies widerspricht der Annahme, daß für alle $k \in \mathbb{N}$

$\int_{B_{n_k}} \|f_{n_k}\| \, d\mu \geq \int_{B_{n_k}} \|f_{n_k} \chi_B\| \, d\mu \geq \delta$, obwohl $\mu(B_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} 0$ gilt.

d) ⇒ b): Wir wählen eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{K}^{\sigma'}$. Für alle $A \in \Sigma_e$ ist mit K auch $R_A(K)$ gleichgradig integrierbar und beschränkt in $L_1(\mu_{|A},X)$. Somit ist $R_A(K)$ mit iii) und iv) für $A \in \Sigma_e$ relativ σ'_A-kompakt [4, S.411, Th. 2.1.] bzw. $\overline{R_A(K)}^{\sigma'_A}$ σ'_A-folgenkompakt. R_A ist σ'-σ'_A-stetig, was $R_A(\overline{K}^{\sigma'}) \subset \overline{R_A(K)}^{\sigma'_A}$ impliziert. Nach v) gilt für $A_k := C_k \setminus C_{k-1}$, $C_0 := \emptyset$ $(k \in \mathbb{N})$ und $A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$:

$$R_{S\setminus A}(f_n) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Da $\overline{R_{A_k}(K)}^{\sigma'_{A_k}}$ σ'_{A_k}-folgenkompakt ist für $k \in \mathbb{N}$, findet man ein $f^1 \in L_1(\mu,X)$, $f^1 = f^1 \chi_{A_1}$ und eine Teilfolge $(f^1_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß $f^1_n \chi_{A_1} \xrightarrow[n\to\infty]{\sigma'} f^1$. Induktiv gibt es für $k \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge $(f^{k+1}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f^k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $f^{k+1} \in L_1(\mu,X)$ mit $f^{k+1} = f^{k+1} \chi_{A_{k+1}}$ derart, daß für $p \leq k+1$ $f^{k+1}_n \chi_{A_p} \xrightarrow[\sigma']{n\to\infty} f^p$.

Durch ein Diagonalverfahren erhält man eine Teilfolge $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß $f_{n_j} \chi_{A_k} \xrightarrow[\sigma']{j\to\infty} f^k$ für $k \in \mathbb{N}$.

Es gilt $(\|f^k\|_1)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, denn zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es aufgrund der normierenden Eigenschaft von $L_\infty(\mu,X')$ (vgl. (1.3.4.1.))

ein $g \in B(L_\infty(\mu,X'))$ mit

$$\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \|f^k\|_1 \leq |<\sum_{k=1}^{m} f^k,g>| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} |<f_{n_j} \chi_{\bigcup_{k=1}^{m} A_k},g>|$$

$$\leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \|f_{n_j}\|_1 \leq \sup_{f\in K} \|f\|_1$$

(man beachte, daß nach Wahl der Teilfolge

$<f_{n_j} \chi_{\bigcup_{k=1}^{m} A_k},g> \xrightarrow{j\to\infty} <\sum_{k=1}^{m} f^k,g>$ gilt).

Damit läßt sich $f := \sum_{k=1}^{\infty} f^k$ in $(L_1(\mu,X), \|\cdot\|_1)$ bilden.

Wir haben $f_{n_j} \xrightarrow[\sigma']{j\to\infty} f$, <u>denn:</u>

Es seien $g \in B(L_\infty(\mu,X'))$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben, dann gibt es

(1) nach v) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $j \in \mathbb{N}$ und

$n \geq n_0$ $|<f_{n_j} - f_{n_j}\chi_{C_n},g>| = |<f_{n_j} - f_{n_j}\chi_{\bigcup_{k=1}^{n} A_k},g>| < \frac{\varepsilon}{3}$

(mit K erfüllt natürlich auch $\overline{K}^{\sigma'}$ v)),

(2) nach Definition von f ein $n_1 \geq n_0$, mit $\sum_{k\geq n_1} \|f^k\| < \frac{\varepsilon}{3}$,

(3) nach Konstruktion der Folge ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $j \geq j_0$

und $1 \leq k \leq n_1$ $|<f_{n_j}\chi_{A_k} - f^k,g>| < \frac{\varepsilon}{3n_1}$.

Insgesamt erhält man für $j \geq j_0$

$$|<f - f_{n_j},g>| \leq \sum_{k=1}^{n_1} |<f^k - f_{n_j}\chi_{A_k},g>| + \sum_{k>n_1} \|f^k\|_1$$

$$+ |<f_{n_j} - f_{n_j}\chi_{\bigcup_{k=1}^{n_1} A_k},g>|$$

$$< n_1 \frac{\varepsilon}{3n_1} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

□

(2.1.18.) Bemerkung:

a) Ähnlich wie im Satz (2.1.12), II) kann auf d) v) verzichtet werden, wenn (S,Σ,μ) ein endlicher Maßraum ist.

b) Besitzt X die RNP bezüglich (S,Σ,μ), so kann man d) iv) in der Formulierung des Satzes streichen, denn wie in Bemerkung (2.1.16) c) bereits erwähnt wurde, wird d) iv) in [4, S.411, Th. 2.1] nur benötigt, um die Existenz einer Bochnerdichte in $L_1(\mu_{|B},X)$ für $B \in \Sigma_e$ zu finden. In diesem Fall erhält man eine Charakterisierung relativ σ'-kompakter Teilmengen ohne die Betrachtung bestimmter Operatorenklassen aus $L(L_1(\mu,X),c_0)$.

(2.2.) Die Mackey-Topologie $\tau(L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X'))$ auf $L_1(\mu,X)$

Das Hauptinteresse dieses Abschnittes liegt in der Untersuchung der Mackey-Topologie $\tau := \tau(L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X'))$ auf $L_1(\mu,X)$. Dabei behandeln wir die zentrale Frage, die sich schon aufgrund der Resultate (2.1.14.) bzw. (2.1.15.) erhob, ob $(L_1(\mu,X),\tau)$ quasivollständig ist.

Aus der Definition der Mackey-Topologie wird ersichtlich, daß man sich um die Charakterisierung relativ $\sigma(L_\infty(\mu,X'),L_1(\mu,X))$-kompakter Mengen in $L_\infty(\mu,X')$ bemühen muß. Wenn wir den trivialen Fall, daß X' die RNP bezüglich (S,Σ,μ) besitzt, ausschließen und einen endlichen Maßraum (S,Σ,μ) betrachten, wissen wir nach (1.3.4.6.) daß $B(L_\infty(\mu,X'))$ $\sigma(L_1(\mu,X)',L_1(\mu,X))$-dicht in $B(L_1(\mu,X)')$ liegt, aber natürlich $B(L_\infty(\mu,X'))$ echt in $B(L_1(\mu,X)')$ enthalten ist. Somit ist zwar $B(L_\infty(\mu,X'))$ in $L_\infty(\mu,X')$ auch für positive Maßräume gemäß (1.3.3.5.)

aufgrund der normierenden Eigenschaft von $L_1(\mu,X)$ $\sigma(L_\infty(\mu,X'),L_1(\mu,X))$-abgeschlossen, aber nicht $\sigma(L_\infty(\mu,X'),L_1(\mu,X))$-kompakt. Wir werden uns bei der Charakterisierung von relativ $\sigma(L_\infty(\mu,X'),L_1(\mu,X))$-kompakten Teilmengen auf strikt lokalisierbare Maßräume beschränken, denn dies erfordert die von uns angewandte Technik. Es ist unbekannt, inwieweit sich die Resultate auch auf nicht strikt lokalisierbare Maßräume übertragen lassen.

Als wichtigstes Ergebnis dieser Charakterisierung erhält man, daß die konvexe (bzw. absolut konvexe) Hülle einer relativ $\sigma(L_\infty(\mu,X'),L_1(\mu,X))$-kompakten Menge erneut relativ $\sigma(L_\infty(\mu,X'),L_1(\mu,X))$-kompakt ist. Dies ist besonders für den Beweis des Hauptergebnisses, daß $(L_1(\mu,X),\tau)$ quasivollständig ist, bedeutsam.

Wir schließen diesen Paragraphen mit einer Betrachtung der relativ τ-kompakten Mengen ab. Dabei zeigt sich, daß für jeden Maßraum gemäß (1.3.3.5.) jede relativ τ-kompakte Teilmenge bereits relativ $\|\cdot\|_1$-kompakt ist. Damit besitzt X' genau dann die RNP bezüglich (S,Σ,μ), wenn $(L_1(\mu,X),\tau)$ metrisierbar ist.

Zur Vereinfachung führen wir folgende Notation ein:

$\tau := \tau(L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X'))$ bzw.

$\sigma^* := \sigma(L_\infty(\mu,X'),L_1(\mu,X))$.

Wir definieren für einen positiven Maßraum (S,Σ,μ) eine Klasse von Operatoren $T : L_\infty(\mu,X') \to c_0$, die ähnlich zu denen in (2.1.10.2.) gebildet werden. Für $A \in \Sigma_e$ und eine aufsteigende Folge $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ endlicher Σ-Zerlegung von A definieren wir:

$$\tilde{\Lambda}_1^A(c_0,(\pi_n)) := \{T \in L(L_\infty(\mu,X'),c_0);\ \text{es gibt eine Folge}$$
$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(L_\infty(\mu_{|A},X)) \text{ mit}$$
$$(\mathbf{E}_{\pi_{n+1}} - \mathbf{E}_{\pi_n})(f_n) = f_n \text{ und für } g \in L_\infty(\mu,X') :$$
$$Tg = (\langle f_n,\tilde{R}_A\, g\rangle)_{n\in\mathbb{N}}\}$$

Entsprechend setzen wir $\tilde{\Lambda}_1^A(c_0) := \cup\, \tilde{\Lambda}_1^A(c_0,(\pi_n))$, wobei über alle endli-aufsteigenden Folgen von endlichen Σ-Zerlegungen von A vereinigt wird.

Wir bemerken noch, daß für $A \in \Sigma_e$ $T \in \tilde{\Lambda}_1^A(c_0)$ σ^*-$\sigma(c_0,\ell_1)$-stetig ist, denn ist $b = (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, so existiert $\sum_{j=1}^{\infty} b_j\, e_A(f_j)$ in $(L_\infty(\mu_{|A},X),\|\cdot\|_\infty)$ und damit in $(L_1(\mu_{|A},X),\|\cdot\|_1)$ (dabei ist $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ T nach Definition zugeordnet).

Für $g \in L_\infty(\mu,X')$ gilt dann: $\langle Tg,b\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \langle f_j,\tilde{R}_A(g)\rangle$

$$= \langle \sum_{j=1}^{\infty} b_j\, e_A(f_j),g\rangle = \langle T^*\, b,g\rangle ,$$

wobei $T^*\, b \in L_1(\mu,X)$ ist. Mit (1.2.2.) folgt die σ^*-$\sigma(c_0,\ell_1)$-Stetigkeit.

<u>(2.2.1.) Lemma:</u> Es seien (S,Σ,μ) ein endlicher positiver Maßraum und $m : \Sigma \to X'$ ein Vektormaß mit $\|m(A)\| \leq \mu(A)$ für $A \in \Sigma$.

Dann sind äquivalent:

a) m besitzt eine Dichte $g \in L_\infty(\mu,X')$.

b) Für jede aufsteigende Folge $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Σ-Zerlegungen und $T \in \tilde{\Lambda}_1^S(c_0,(\pi_n))$ ist $T(K((\pi_n)))$ relativ schwach kompakt, wobei

$$K((\pi_n)) := \left\{\sum_{A\in\pi_n} \frac{m(A)}{\mu(A)}\, \chi_A;\ n \in \mathbb{N}\right\} .$$

Beweis:

a) $\Rightarrow$ b): Besitzt m eine Bochnerdichte $g \in L_\infty(\mu,X')$, so ist $K((\pi_n)) = \{\mathbf{E}_{\pi_n} g;\ n \in \mathbb{N}\}$. Also ist $K((\pi_n))$ relativ $\|\cdot\|_1$-kompakt in $L_1(\mu,X')$ und damit auch relativ σ^*-kompakt. $(K((\pi_n)) \subset L_\infty(\mu,X')$, denn $\|\mathbf{E}_{\pi_n} g\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ (vgl. (1.3.5.4.))). Wenn man die σ^*-$\sigma(c_0,\ell_1)$-Stetigkeit von T berücksichtigt, ergibt sich die Notwendigkeit.

b) $\Rightarrow$ a): Wir zeigen, daß für eine aufsteigende Folge von Σ-Zerlegungen $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das Martingal (h_n,π_n) mit $h_n := \sum_{A\in\pi_n} \frac{m(A)}{\mu(A)} \chi_A$ in $(L_1(\mu,X'), \|\cdot\|_1)$ konvergiert. Angenommen dies ist nicht der Fall, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(h_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß für $k \in \mathbb{N}$ $\|h_{n_{k+1}} - h_{n_k}\|_1 > \varepsilon$ gilt.

Nun ist $L_\infty(\mu,X)$ normierend für $(L_1(\mu,X'), \|\cdot\|_1)$ (vgl. [15, S.232, Th. 6]), also findet man eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset B(L_\infty(\mu,X))$ mit $\operatorname{Re} \langle f_k, h_{n_{k+1}} - h_{n_k}\rangle > \varepsilon$.

Es gilt für $k \in \mathbb{N}$ (da (h_n,π_n) ein Martingal ist):

$$\langle f_k, h_{n_{k+1}} - h_{n_k}\rangle = \langle f_k, (\mathbf{E}_{\pi_{n_{k+1}}} - \mathbf{E}_{\pi_{n_k}})(h_{n_{k+1}})\rangle$$

$$= \langle (\mathbf{E}_{\pi_{n_{k+1}}} - \mathbf{E}_{\pi_{n_k}})(f_k), h_{n_{k+1}} - h_{n_k}\rangle$$

Damit können wir $f_k = (\mathbf{E}_{\pi_{n_{k+1}}} - \mathbf{E}_{\pi_{n_k}})(f_k)$ für $k \in \mathbb{N}$ o.E. annehmen.

Ist nun $T \in \tilde{\Lambda}_1(c_0(\pi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}})$ zu $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gebildet, so erhalten wir für $k,m \in \mathbb{N}$, $k > m$:

$$\operatorname{Re}(Th_{n_k}) = \operatorname{Re}\langle f_m, h_{n_k}\rangle = \operatorname{Re}\langle (\mathbf{E}_{\pi_{n_{m+1}}} - \mathbf{E}_{\pi_{n_m}})(f_m), h_{n_k}\rangle$$

$$= \operatorname{Re}\langle f_m, h_{n_{m+1}} - h_{n_m}\rangle > \varepsilon \quad .$$

und für $k \leq m$

$$|(Th_{n_k})_m| = |\langle(E_{\pi_{n_{m+1}}} - E_{\pi_{n_m}})(f_m),h_{n_k}\rangle|$$

$$= |\langle f_m,(E_{\pi_{n_{m+1}}} - E_{\pi_{n_m}})(h_{n_k})\rangle| = 0 .$$

Da für $A \in \Sigma$ $\|m(A)\| \leq \mu(A)$ gilt, ist $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_\infty$ -beschränkte Folge in $L_\infty(\mu,X')$. Nun ist T ein linearer, beschränkter Operator, was impliziert, daß auch $(T(h_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset c_0$ beschränkt ist. Bezeichnet für $m \in \mathbb{N}$ $e_m \in \ell_1$ den m-ten Einheitsvektor, so ist $\inf_{k>m} \operatorname{Re} \langle T(h_{n_k}),e_m\rangle > \varepsilon \geqq \sup_{k<m} \operatorname{Re} \langle T(h_{n_k}),e_m\rangle = 0$. Dies steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $T(K)$ relativ schwach kompakt ist und dem Kriterium von R.C. James (vgl. [30, S.103, Th. 1]) genügt. □

Wie schon am Beginn dieses Abschnitts erwähnt, soll das erste wichtige Ergebnis in diesem Abschnitt, die Charakterisierung relativ σ^*-kompakter Teilmengen von $L_\infty(\mu,X')$ sein. Diese Charakterisierung wird insbesondere zeigen, daß die konvexe Hülle σ^*-kompakter Mengen relativ σ^*-kompakt ist (vgl. Korollar (2.2.3.)). Die Tatsache ist keineswegs selbstverständlich, denn ist (S,Σ,μ) endlich, nicht rein atomar und besitzt X' nicht die RNP, so fällt bekanntlich (vgl.[14, S.98, Th. 1]) $L_\infty(\mu,X')$ nicht mit $L_1(\mu,X)'$ zusammen. Andererseits kann man $L_\infty(\mu,X')$ isometrisch isomorph in $L_1(\mu,X)'$ auf kanonische Weise einbetten (vgl. (1.3.4.1.)), und $B(L_\infty(\mu,X'))$ ist $\sigma(L_1(\mu,X)',L_1(\mu,X))$-dicht in $B(L_1(\mu,X)')$ (vgl.(1.3.4.6.)) Somit ist "relativ σ^*-kompakt" nicht gleichbedeutend mit "beschränkt" in $L_\infty(\mu,X')$, wie dies für Dualräume Y' mit der $\sigma(Y',Y)$-Topologie gültig ist.

(2.2.2.) Satz: Es sei (S,Σ,μ) ein strikt lokalisierbarer Maßraum mit zugeordneter Familie $(A_\iota)_{\iota\in I} \subset \Sigma_e$ (vgl. (1.3.3.6.)). Dann sind für eine Teilmenge $K \subset L_\infty(\mu,X')$ äquivalent

a) K ist relativ σ^*-kompakt.

b) i) K ist $\|\cdot\|_\infty$-beschränkt.

ii) Für alle $\iota \in I$ und $T \in \tilde{\Lambda}_1^{A_\iota}(c_0)$ ist $T(K)$ relativ schwach kompakt in c_0.

Beweis:

a) $\Rightarrow$ b): Ist $K \subset L_\infty(\mu,X')$ relativ σ^*-kompakt, d.h. $\bar{K}^{\sigma^*} \subset L_\infty(\mu,X')$ ist σ^*-kompakt, so bedeutet dies, daß $\bar{K}^{\sigma^*} \subset L_1(\mu,X)'$ $\sigma(L_1(\mu,X)',L_1(\mu,X))$-kompakt ist, denn $L_\infty(\mu,X') \subset L_1(\mu,X)'$ isometrisch. Also ist mit $\bar{K}^{\sigma^*}$ auch K beschränkt. Die σ^*-$\sigma(c_0,\ell_1)$-Stetigkeit von $T \in \tilde{\Lambda}_1^A(c_0)$ ergibt die Notwendigkeit von ii).

b) $\Rightarrow$ a): Wir nehmen $K = \mathrm{co}\,K$ an, da mit K auch $\mathrm{co}\,K$ i) und ii) erfüllt.

1. Schritt: Wir betrachten zuerst einen endlichen Maßraum. Da $L_\infty(\mu,X') \subset L_1(\mu,X)'$ isometrisch ist, muß nach i) $K \subset L_1(\mu,X)'$ relativ $\sigma(L_1(\mu,X)',L_1(\mu,X))$-kompakt sein. Wir wollen nun zeigen, daß jedes $\phi \in \bar{K}^{\sigma(L_1(\mu,X)',L_1(\mu,X))}$ bereits stark meßbar ist, d.h. $\phi \in L_\infty(\mu,X')$. Natürlich gilt $\bar{K}^{\sigma^*} \subset \bar{K}^{\sigma(L_1(\mu,X)',L_1(\mu,X))}$. Damit besitzt aber jedes Netz $(g_\iota)_{\iota\in I} \subset \bar{K}^{\sigma^*}$ einen Häufungspunkt $\phi \in L_\infty(\mu,X)'$, und dieser liegt dann in $\bar{K}^{\sigma^*}$.
Es sei also $\phi \in \bar{K}^{\sigma(L_1(\mu,X)',L_1(\mu,X))}$, und wir nehmen $\sup_{g\in K} \|g\|_\infty \leq 1$ an. Wir konstruieren nun ein σ-additives Vektormaß:

Für $A \in \Sigma$ sei $m_\phi(A) : X \to \mathbb{K}$,

$$x \mapsto \phi(x\,\chi_A).$$

Da $\phi \in L_1(\mu,X)'$, ist $m_\phi(A) \in X'$, und es gilt:

$\|m_\phi(A)\| = \sup_{x\in B(X)} |\phi(x\,\chi_A)| \leq \sup_{x\in B(X)} \|\phi\|\ \|x\,\chi_A\|_1 \leq \mu(A)$.

Definiert man $m_\phi : \Sigma \longrightarrow X'$

$A \longmapsto m_\phi(A)$, so ist m_ϕ additiv aufgrund der Linearität von ϕ.

Da für alle $A \in \Sigma$ $\|m(A)\| \leq \mu(A)$ gilt, ist m_ϕ von beschränkter Variation, absolut μ-stetig und damit auch σ-additiv.

Wir haben dann für $f \in \mathbb{E}(S,\Sigma,\mu,X)$:

$$\langle\phi,f\rangle = \int f\, dm_\phi .$$

Weil $\mathbb{E}(S,\Sigma,\mu,X)$ $\|\cdot\|_1$-dicht in $L_1(\mu,X)$ liegt, ergibt sich aus [14, S.56, Th. 1]

(1) $\langle\phi,f\rangle = \int f\, dm_\phi$ für $f \in L_1(\mu,X)$, wobei $\int f\, dm_\phi$ das Bartle-Integral darstellt.

Wir wollen im nächsten Schritt zeigen, daß m_ϕ eine $L_\infty(\mu,X')$-Dichte besitzt und benutzen dazu Lemma (2.2.1.). Zu einer aufsteigenden Folge endlicher Σ-Zerlegungen $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren wir $h_n := \sum_{A\in\pi_n} \frac{m_\phi(A)}{\mu(A)}\chi_A$ $(n \in \mathbb{N})$

und wählen ein $T \in \tilde{\Lambda}_1(c_0,(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Zuerst haben wir für $n \in \mathbb{N}$ $h_n \in \overline{\mathbb{E}_{\pi_n}(K)}^{\sigma^*}$.

<u>Denn:</u> Nach Definition ist $h_n \in L_\infty(\mu,X')$. Ferner existiert ein Netz $(g_\iota)_{\iota\in I} \subset K$ mit $g_\iota \xrightarrow[\iota\in I]{} \phi$ in der $\sigma(L_1(\mu,X)',L_1(\mu,X))$-Topologie.

Angenommen $h_n \notin \overline{\mathbb{E}_{\pi_n}(K)}^{\sigma^*}$, dann gibt es nach einem Trennungssatz $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ und $f \in L_1(\mu,X)$ derart, daß für alle $g \in \overline{\mathbb{E}_{\pi_n}(K)}^{\sigma^*}$ gilt:

$\mathrm{Re}\,\langle f,g\rangle \leq \alpha < \beta \leq \mathrm{Re}\,\langle f,h_n\rangle = \mathrm{Re}\,\langle \mathbb{E}_{\pi_n} f,h_n\rangle$,

denn $\mathbb{E}_{\pi_n} h_n = h_n$.

Nach (1) und der Definition von h_n gilt weiter:

$\mathrm{Re}\ \langle \mathbf{E}_{\pi_n} f, h_n \rangle = \mathrm{Re}\ \langle \phi, \mathbf{E}_{\pi_n} f \rangle$

Andererseits hat man aber für $\iota \in I$

$\mathrm{Re}\ \langle f, \mathbf{E}_{\pi_n} g_\iota \rangle = \mathrm{Re}\ \langle \mathbf{E}_{\pi_n} f, g_\iota \rangle \leq \alpha < \beta \leq \mathrm{Re}\ \langle \phi, \mathbf{E}_{\pi_n} f \rangle$,

was im Widerspruch zu $g_\iota \xrightarrow[\iota \in I]{} \phi$ steht.

Somit ist $h_n \in \overline{\mathbf{E}_{\pi_n}(K)}^{\sigma^*}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Nach ii) ist $T(K) \subset c_0$ relativ schwach kompakt. Berücksichtigt man [4, S.412, Prop. 2.3.], so ist auch

$$\hat{T}(K) := \{(\beta_m)_{m\in\mathbb{N}} \in c_0;\ \text{es gibt } (\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}} \in T(K),\ \text{so daß für alle } m \in \mathbb{N}\ |\beta_m| \leq |\alpha_m|\}$$

relativ schwach kompakt in c_0.

Ordnet man $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(L_\infty(\mu,X))$ $T \in \tilde{\Lambda}_1^S(c_0,(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ zu, so gilt für $g \in K$ und $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\big(T(\mathbf{E}_{\pi_n}(g))\big)_m &= \langle f_m, \mathbf{E}_{\pi_n}(g) \rangle \\
&= \langle \mathbf{E}_{\pi_n}(\mathbf{E}_{\pi_{m+1}} - \mathbf{E}_{\pi_m})(f_m), g \rangle \\
&= \begin{cases} (Tg)_m & \text{falls } m < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .
\end{aligned}$$

Damit gilt für $n \in \mathbb{N}$ $T(\mathbf{E}_{\pi_n}(K)) \subset \hat{T}(K)$.

Da T σ^*-$\sigma(c_0,\ell_1)$-stetig ist, erhalten wir für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
T(h_n) \in T\big(\overline{\mathbf{E}_{\pi_n}(K)}^{\sigma^*}\big) &\subset \overline{T\big(\mathbf{E}_{\pi_n}(K)\big)}^{\sigma(c_0,\ell_1)} \\
&\subset \overline{\hat{T}(K)}^{\sigma(c_0,\ell_1)} .
\end{aligned}$$

Also ist $T(\{h_n;\ n \in \mathbb{N}\})$ relativ schwach kompakt und mit Lemma (2.2.1.) besitzt m_ϕ eine Dichte $g \in L_\infty(\mu,X')$. Damit folgt für $f \in L_1(\mu,X)$ die Darstellung

$$\langle \phi, f \rangle = \int_S \langle f, g \rangle\, d\mu .$$

2. Schritt: Es seien (S,Σ,μ) ein positiver strikt lokalisierbarer Maßraum und $(A_\iota)_{\iota\in I} \subset \Sigma_e$ paarweise disjunkt gemäß (1.3.3.6.).

Da $L_\infty(\mu,X') \subset L_1(\mu,X)'$ isometrisch in kanonischer Weise einbettbar ist (vgl. (1.3.4.2.)), ist K relativ $\sigma(L_1(\mu,X)',L_1(\mu,X))$-kompakt.

Für $\phi \in \overline{K}^{\sigma(L_1(\mu,X)',L_1(\mu,X))}$, zeigen wir nun $\phi \in L_\infty(\mu,X')$.

Für $\iota \in I$ definieren wir $\phi^\iota : L_1(\mu_{|A_\iota},X) \to \mathbb{K}$, $\phi^\iota := \phi \circ e_{A_\iota}$.

Dann ist $\phi^\iota \in L_1(\mu_{|A_\iota},X)'$, denn e_{A_ι} ist linear und $\|e_{A_\iota}\| \leq 1$ nach Definition in (1.3.4.).

Wir wählen nun ein Netz $(g_\alpha)_{\alpha\in J} \subset K$, das in der $\sigma(L_1(\mu,X)',L_1(\mu,X))$-Topologie gegen ϕ konvergiert. Es gilt für $\iota \in I$:

$\tilde{R}_{A_\iota}(g_\alpha) \xrightarrow[\alpha\in J]{\sigma^*_{A_\iota}} \phi^\iota$, denn für $f \in L_1(\mu_{|A_\iota},X)$ hat man

$\langle f,\tilde{R}_{A_\iota}(g_\alpha)\rangle = \langle e_{A_\iota}(f),g_\alpha\rangle \xrightarrow[\alpha\in J]{} \langle e_{A_\iota}(f),\phi\rangle = \langle f,\phi^\iota\rangle$.

Somit ist für $\iota \in I$ $\phi^\iota \in \overline{\tilde{R}_{A_\iota}(K)}^{\sigma(L_1(\mu_{|A_\iota},X)',L_1(\mu_{|A_\iota},X))}$. Nach b) und dem 1. Schritt folgt für $\iota \in I$ $\phi^\iota \in L_\infty(\mu_{|A_\iota},X')$. Da K beschränkt ist, gilt für $\iota \in I$ $\|\phi^\iota\|_\infty \leq \sup_{g\in K} \|g\|_\infty$.

Wir definieren $G := \sum_{\iota\in I} \tilde{e}_{A_\iota}(\phi^\iota)$ (punktweise) und können folgern:

G ist μ-meßbar (vgl. (1.3.3.7.)) mit $\|G\|_\infty \leq \sup_{g\in K} \|g\|_\infty$.

Schließlich erhält man $\langle f,G\rangle = \langle f,\phi\rangle$ für $f \in L_1(\mu,X)$; denn sind $\varepsilon > 0$ und $E \subset I$ endlich derart, daß für $M := \sup_{g\in K} \|g\|_\infty$

$\sum_{\iota\in I\setminus E} \|f\,\chi_{A_\iota}\| < \frac{\varepsilon}{2(M+1)}$, so folgt:

$$
\begin{aligned}
|\langle f,\phi\rangle - \langle f,G\rangle| &\leq |\langle f,\phi\rangle - \langle \sum_{l\in E} f\,\chi_{A_l},\phi\rangle| + \\
&\quad |\langle \sum_{l\in E} f\,\chi_{A_l},\phi\rangle - \sum_{l\in E} \langle R_{A_l} f,\phi^l\rangle| + \\
&\quad |\sum_{l\in E} \langle f,\tilde{e}_{A_l}\,\phi^l\rangle - \langle f,G\rangle| \\
&< \|\phi\| \sum_{l\in I\setminus E} \|f\,\chi_{A_l}\|_1 + \\
&\quad \|G\| \sum_{l\in I\setminus E} \|f\,\chi_{A_i}\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Damit ist $\bar{K}^{\sigma(L_1(\mu,X)',L_1(\mu,X))} \subset L_\infty(\mu,X')$. Aufgrund der σ^*-$\sigma(L_1(\mu,X)',L_1(\mu,X))$-stetigen Einbettung von $L_\infty(\mu,X)$ in $L_1(\mu,X)'$ ist $\bar{K}^{\sigma^*} \subset \bar{K}^{\sigma(L_1(\mu,X)',L_1(\mu,X))}$, und $\bar{K}^{\sigma^*}$ ist somit σ^*-kompakt. □

Aus diesem Satz lassen sich nun einige Folgerungen ziehen, die besonders im Hinblick auf das Hauptergebnis dieses Paragraphen , die Quasivollständigkeit von $(L_1(\mu,X),\tau)$ für strikt lokalisierbare Maßräume, von Bedeutung sind.

<u>(2.2.3.) Korollar:</u> Für einen positiven strikt lokalisierbaren Maßraum (S,Σ,μ) gilt: Ist $K \subset L_\infty(\mu,X')$ relativ σ^*-kompakt, so ist $\operatorname{co} K$ bzw. $\operatorname{aco} K$ relativ σ^*-kompakt.

<u>Beweis:</u> Nach Satz (2.2.2.) erfüllt K die Bedingung b). Da $\operatorname{co} K$ bzw. $\operatorname{aco} K$ auch b) genügt, folgt die Aussage mit Satz (2.2.2.). □

<u>(2.2.4.) Korollar:</u> Es sei (S,Σ,μ) ein positiver strikt lokalisierbarer Maßraum. Dann ist jede relativ σ^*-abzählbar kompakte Teilmenge $K \subset L_\infty(\mu,X')$ auch relativ σ^*-kompakt.

Beweis: Jede relativ σ^*-abzählbar kompakte Teilmenge ist aufgrund der normierenden Eigenschaft von $L_1(\mu,X)$ (vgl. (1.3.4.2.)) beschränkt. Für $A \in \Sigma_e$ und $T \in \tilde{\Lambda}_1^A(c_0)$ ist T σ^*-$\sigma(c_0,\ell_1)$-stetig, und damit ist $T(K)$ relativ schwach abzählbar kompakt, d.h. nach dem Satz von Eberlein-Šmulian relativ schwach kompakt. K erfüllt hiermit b), und mit Satz (2.2.2.) ist K relativ σ^*-kompakt. □

In diesem Zusammenhang sollte noch kurz auf die relativ σ^*-folgenkompakten Teilmengen eingegangen werden. Wir formulieren die Charakterisierung für einen σ-finiten Maßraum.

(2.2.5.) Korollar: Für einen σ-finiten Maßraum (S,Σ,μ) gilt: Eine relativ σ^*-abzählbar kompakte Teilmenge ist genau dann relativ σ^*-folgenkompakt, wenn für alle $A \in \Sigma_e$ $I_A(K) \subset X'$ relativ $\sigma(X',X)$-folgenkompakt ist.

Beweis: Es sei $K \subset L_\infty(\mu,X')$ relativ σ^*-folgenkompakt, dann folgt nach der σ^*-$\sigma(X',X)$-Stetigkeit von $I_A : L_\infty(\mu,X') \to X'$ für $A \in \Sigma_e$, daß $I_A(K)$ relativ $\sigma(X',X)$-folgenkompakt ist.

Es seien nun $K \subset L_\infty(\mu,X')$ relativ σ^*-abzählbar kompakt und für alle $A \in \Sigma_e$ $I_A(K)$ relativ $\sigma(X',X)$-folgenkompakt.

1. Schritt: Wir behandeln zuerst einen endlichen Maßraum (S,Σ,μ). Es sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \bar{K}^{\sigma^*}$ vorgegeben. Da es für alle $n \in \mathbb{N}$ eine separable Teil-σ-Algebra $\Sigma_n \subset \Sigma$ gibt, so daß $\mathbb{E}_{\Sigma_n}^{X'} g_n = g_n$ gilt ($L_\infty(\mu,X') \subset L_1(\mu,X')$, denn (S,Σ,μ) ist endlich), können wir annehmen, daß (S,Σ,μ) separabel ist. Dann wähle man eine aufsteigende Folge von endlichen Σ-Zerlegungen $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die (1.3.1.11.) erfüllt.

Nach Voraussetzung ist für alle $A \in \Sigma$ $I_A(K)$ relativ $\sigma(X',X)$-folgenkompakt. Dies bedeutet, daß es eine Teilfolge $(g_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $g^1 \in L_\infty(\mu,X')$ mit $\mathbf{E}_{\pi_1} g^1 = g^1$ gibt, so daß $\mathbf{E}_{\pi_1} g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\sigma^*} g^1$.

Induktiv erhält man für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $g^{k+1} \in L_\infty(\mu,X')$ mit $\mathbf{E}_{\pi_{k+1}} g^{k+1} = g^{k+1}$ und eine Teilfolge $(g_n^{k+1})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(g_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ derart, daß für alle $p \in \{1,\ldots, k+1\}$:

$$\mathbf{E}_{\pi_p} g_n^{k+1} \xrightarrow[n\to\infty]{\sigma^*} g^p.$$

Durch Diagonalverfahren findet man eine Teilfolge $(g_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$

(1) $\mathbf{E}_{\pi_k} g_{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{\sigma^*} g^k.$

Die Menge $\{g_{n_j} ; j \in \mathbb{N}\} \subset \bar{K}^{\sigma^*}$ ist nach Voraussetzung relativ σ^*-abzählbar kompakt, deshalb gibt es einen Häufungspunkt $g \in L_\infty(\mu,X')$ von $(g_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$. Wegen der σ^*-σ^*-Stetigkeit von $\mathbf{E}_{\pi_k} : L_\infty(\mu,X') \to L_\infty(\mu,X')$ ist $\mathbf{E}_{\pi_k} g$ Häufungspunkt von $(\mathbf{E}_{\pi_k}(g_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ $(k \in \mathbb{N})$.

Nach (1) haben wir dann für $k \in \mathbb{N}$

(2) $\mathbf{E}_{\pi_k} g = g^k.$

Da nun $\mathbf{E}(S, \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \pi_k,\mu,X)$ normdicht in $L_1(\mu,X)$ liegt vgl. (1.3.5.2.), folgt mit (1) und (2)

$$g_{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{\sigma^*} g .$$

2. Schritt: Es sei (S,Σ,μ) ein σ-finiter positiver Maßraum, d.h. es gibt eine paarweise disjunkte Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_e$ mit $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Aus der Definition folgt, daß $\tilde{R}_{A_n} : L_\infty(\mu,X') \to L_\infty(\mu_{|A_n},X')$ σ^*-$\sigma^*_{A_n}$-stetig ist, und mit Korollar (2.2.4.) ist K relativ σ^*-kompakt. Somit ist $\tilde{R}_{A_n}(K)$ relativ $\sigma^*_{A_n}$-kompakt, also insbesondere relativ $\sigma^*_{A_n}$-abzählbar kompakt. Wendet man den 1. Schritt auf $\tilde{R}_{A_n}(K)$ an, so schließt man, daß $\tilde{R}_{A_n}(K)$ relativ $\sigma^*_{A_n}$-folgenkompakt ist.

Es sei nun $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\tilde{K}^{\sigma^*}$. Dann gibt es eine Teilfolge $(g_k^1)_{k\in\mathbb{N}}$ von $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $g^1 \in L_\infty(\mu_{|A_1},X')$, so daß

$\tilde{R}_{A_1}(g_k^1) \xrightarrow[\sigma^*_{A_1}]{k\to\infty} g^1$.

Durch Induktion findet man zu $m \in \mathbb{N}$ $g^{m+1} \in L_\infty(\mu,X')$ und eine Teilfolge $(g_k^{m+1})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(g_k^m)_{k\in\mathbb{N}}$, so daß $\tilde{R}_{A_n}(g_k^{m+1}) \xrightarrow[\sigma^*_{A_n}]{k\to\infty} g^n$ für $1 \leq n \leq m+1$. Mit dem Diagonalverfahren findet man eine Teilfolge $(g_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ $(\tilde{R}_{A_n}(g_{k_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ gegen $g^n \in L_\infty(\mu_{|A_n},X')$ $\sigma^*_{A_n}$-konvergiert und damit eine $\sigma^*_{A_n}$-Cauchyfolge ist.

$(g_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ ist eine σ^*-Cauchy-Folge, denn: Ist $f \in L_1(\mu,X)$, $\varepsilon > 0$ und $M := \sup_{j\in\mathbb{N}} \|g_{k_j}\|_\infty$, dann gibt es eine endliche Teilmenge $E \subset \mathbb{N}$, $E \neq \emptyset$, derart, daß für $B := \bigcup_{n\in E} A_n$ $\int_S \|f\chi_{\complement B}\|_1 \, d\mu < \frac{\varepsilon}{4(M+1)}$.

Weiter gibt es ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $p,j \geq j_0$ und alle $n \in E$

$|\langle R_{A_n} f, \tilde{R}_{A_n}(g_{k_p} - g_{k_j})\rangle| < \frac{\varepsilon}{2 \text{ card } E}$.

Somit haben wir für $j,p \geq j_0$:

$$\begin{aligned}
|\langle f, g_{k_p} - g_{k_j}\rangle| &\leq |\langle f\,\chi_{\complement B}, g_{k_p} - g_{k_j}\rangle| + \\
&\quad \sum_{n\in E} |\langle f\,\chi_{A_n}, g_{k_p} - g_{k_j}\rangle| \\
&\leq 2M \cdot \int_S \|f\,\chi_{\complement B}\|\, d\mu + \\
&\quad \sum_{n\in E} |\langle R_{A_n}(f), \tilde{R}_{A_n}(g_{k_p} - g_{k_j})\rangle| \\
&< 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4(M+1)} + \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{card} E} \operatorname{card} E < \varepsilon .
\end{aligned}$$

Da $(g_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ auch relativ σ^*-abzählbar kompakt ist, konvergiert damit $(g_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$. □

<u>(2.2.6.) Satz:</u> Ist (S,Σ,μ) ein positiver, strikt lokalisierbarer Maßraum, dann ist $(L_1(\mu,X),\tau)$ quasivollständig.

<u>Beweis:</u> Wir betrachten ein beschränktes τ-Cauchy-Netz $(f_\alpha)_{\alpha\in J} \subset L_1(\mu,X)$ und zeigen, daß es ein $f \in L_1(\mu,X)$ mit $f_\alpha \xrightarrow[\alpha\in J]{\tau} f$ gibt. Im ersten Teil beschränken wir uns auf einen endlichen, positiven Maßraum (S,Σ,μ).

I) <u>1. Schritt:</u> Zuerst wollen wir die Existenz eines σ-additiven μ-stetigen Vektormaßes $m : \Sigma \to X$ von beschränkter Variation nachweisen, so daß für alle $A \in \Sigma$ gilt:

$$\int_A f_\alpha\, d\mu \xrightarrow[\alpha\in J]{\|\cdot\|} m(A).$$

Ist $A \in \Sigma$, so bildet $(\int_A f_\alpha\, d\mu)_{\alpha\in J}$ ein $\|\cdot\|$-Cauchy-Netz,

<u>denn:</u> Die Menge $\{x'\,\chi_A;\ x' \in B(X')\}$ ist absolut konvex und σ^*-kompakt in $L_\infty(\mu,X')$. Damit gilt

$$\|\int_A f_\alpha \, d\mu - \int_A f_\beta \, d\mu\| = \sup_{x' \in B(X')} |\langle \int_A f_\alpha - f_\beta \, d\mu, x' \rangle|$$

$$= \sup_{x' \in B(X')} |\langle f_\alpha - f_\beta, x' \chi_A \rangle|$$

$$\xrightarrow{\alpha,\beta \in \mathcal{J}} 0 \quad \text{nach Definition der } \tau\text{-Topologie .}$$

Also können wir die folgende Abbildung definieren :

$$m : \Sigma \to X$$

$$A \mapsto \|\cdot\| - \lim_{\alpha \in \mathcal{J}} \int_A f_\alpha \, d\mu$$

Natürlich ist m ein additives Vektormaß.

- <u>m ist von beschränkter Variation:</u> Sind $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ paarweise disjunkt, so hat man mit $M := \sup_{\alpha \in \mathcal{J}} \|f_\alpha\|_1$: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\alpha_0 \in \mathcal{J}$, so daß für alle $\alpha \geq \alpha_0$ und $j = 1, \ldots, n$

  $$\|m(A_j) - \int_{A_j} f_\alpha \, d\mu\| < \frac{\varepsilon}{n} .$$

  Also gilt für $\alpha \geq \alpha_0$:

  $$\sum_{j=1}^{n} \|m(A_j)\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|\int_{A_j} f_\alpha \, d\mu\| + \varepsilon \leq \|f_\alpha\| + \varepsilon \leq M + \varepsilon$$

  und damit $\sum_{j=1}^{n} \|m(A_j)\| \leq M$.

- <u>m ist σ-additiv:</u> Es sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ paarweise disjunkt und $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Da die Variation von m beschränkt ist, existiert $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ in $(X, \|\cdot\|)$.

  Wir zeigen, daß für alle $x' \in B(X')$

  (1) $\langle \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n), x' \rangle = \langle m(A), x' \rangle$ gilt.

  Es sei $x' \in B(X)$ fest gewählt, dann ist nach Definition der Menge A die Menge $C := \{x' \chi_A, \sum_{j=1}^{k} x' \chi_{A_j} ; k \in \mathbb{N}\}$ σ^*-kompakt. Nach Korollar (2.2.3.) muß somit auch $\overline{\text{aco}}^{\sigma^*} C$ σ^*-kompakt sein.

Wir geben uns ein $\varepsilon > 0$ beliebig vor. Es existiert dann ein $\alpha_0 \in \mathcal{J}$, so daß für $\alpha,\beta \geq \alpha_0$:

(2) $|\langle f_\alpha - f_\beta, g\rangle| < \frac{\varepsilon}{4}$ für alle $g \in C$ und

(3) $\|m(A) - \int_A f_\alpha \, d\mu\| < \frac{\varepsilon}{4}$ gilt.

Ferner finden wir ein $k \in \mathbb{N}$ derart, daß für $n \geq k$:

(4) $\|\int_A f_{\alpha_0} \, d\mu - \sum_{j=1}^{n} \int_{A_j} f_{\alpha_0} \, d\mu\| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Weiter gibt es für jedes $n \geq k$ ein $\alpha(n) \geq \alpha_0$, so daß für $\alpha \geq \alpha(n)$ und $j = 1,\ldots, n$

(5) $\|m(A_j) - \int_{A_j} f_\alpha \, d\mu\| < \frac{\varepsilon}{4n}$.

Wir erhalten für $n \geq k$ und $\alpha \geq \alpha(n)$:

$$|\langle m(A) - \sum_{j=1}^{n} m(A_j), x'\rangle| \leq$$

$$|\langle m(A) - \int_A f_{\alpha_0} \, d\mu, x'\rangle| + |\langle \int_A f_{\alpha_0} \, d\mu - \sum_{j=1}^{n} \int_{A_j} f_{\alpha_0} \, d\mu, x'\rangle|$$

$$+ |\langle \sum_{j=1}^{n} \int_{A_j} f_{\alpha_0} \, d\mu - \sum_{j=1}^{n} \int_{A_j} f_\alpha \, d\mu, x'\rangle|$$

$$+ |\langle \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{A_j} f_\alpha \, d\mu - m(A_j) \right), x'\rangle| \quad \text{(nach (3),(4) und (5))}$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \sup_{g \in C} |\langle f_{\alpha_0} - f_\alpha, g\rangle| + \frac{\varepsilon}{4} \underset{\text{(nach (2))}}{<} \varepsilon .$$

Also gilt $|\langle m(A) - \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j), x'\rangle| \leq \varepsilon$ und, da $\varepsilon > 0$ beliebig war auch (1).

- Beachtet man die Definition von m, so hat man:

Mit $A \in \Sigma$, $\mu(A) = 0$ folgt auch $m(A) = 0$. Nach dem Theorem von Pettis (vgl. [14, S.10, Th. 1]) ist m absolut μ-stetig.

2. Schritt: Wir weisen nun nach, daß m eine $L_1(\mu,X)$-Dichte besitzt. Dazu benützen wir das Kriterium von J. Batt - W. Hiermeyer (vgl. [4, S.413, Prop. 2.4.]). Für eine vorgegebene aufsteigende Folge $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ endlicher Σ-Zerlegungen und $T \in \Lambda_1^S(c_0,(\pi_n))$ (vgl. (2.1.10.2.)) ist $T\left(\left\{h_n := \sum_{A\in\pi_n} \frac{m(A)}{\mu(A)} \chi_A;\ n \in \mathbb{N}\right\}\right)$ relativ schwach kompakt in c_0.

Es sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(L_\infty(\mu,X'))$ mit $g_n = (\mathbb{E}_{\pi_{n+1}} - \mathbb{E}_{\pi_n})(g_n)$ gemäß der Definition von $T \in \Lambda_1^S(c_0,(\pi_n))$.

Wir haben $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\sigma^*} 0$, denn für $\varepsilon > 0$ und $f \in L_1(\mu,X)$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für $n \geq n_0$ $\|\mathbb{E}_{\pi_{n+1}} f - \mathbb{E}_{\pi_n} f\|_1 < \varepsilon$ $((\mathbb{E}_{\pi_n} f, \pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bildet ein konvergentes Martingal). Damit gilt für $n \geq n_0$:

$|\langle g_n,f\rangle| = |\langle g_n,(\mathbb{E}_{\pi_{n+1}} - \mathbb{E}_{\pi_n})(f)\rangle| < \varepsilon$. Nach Korollar (2.2.3.) ist $D := \overline{\mathrm{aco}}^{\sigma^*}(g_n;\ n \in \mathbb{N})$ σ^*-kompakt.

Die Menge $\left\{\sum_{n=1}^{\infty} b_n g_n;\ (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B(\ell_1)\right\} \subset D$ ist daher relativ σ^*-kompakt. Wir nehmen nun an, daß $T\left(\left\{h_n = \sum_{A\in\pi_n} \frac{m(A)}{\mu(A)} \chi_A; n \in \mathbb{N}\right\}\right)$ nicht relativ schwach kompakt ist. Nach [30, S.101, Th. 1] gibt es eine Folge $(h_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}} \subset (h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, eine Folge $(b^m)_{m\in\mathbb{N}} \subset B(\ell_1)$ und ein $\Theta > 0$, derart, daß

$\inf\{\mathrm{Re}\ \langle T(h_{n(j)}),b^m\rangle;\ m < j\} > \sup\{\mathrm{Re}\ \langle T(h_{n(j)}),b^m\rangle;\ m > j\} + \Theta$

(man beachte, daß $\sup_{m\in\mathbb{N}} \|T(h_n)\| < \infty$, denn m ist von beschränkter Variation und $\|T\| \leq 1$). Man wählt nun eine Teilfolge $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ derart aus, daß $(n(j_k))_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist und setzt für $k \in \mathbb{N}$ $m_k := j_k$ sowie $h_{n_k} := h_{n(j_k)}$. Es gilt dann:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{\mathrm{Re}\ \langle T(h_{n_k}),b^{m_i}\rangle;\ i<k\} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{\mathrm{Re}\ \langle T(h_{n(j_k)}),b^{m}\rangle;\ m<j_k\}$$

$$\subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{\mathrm{Re}\ \langle T(h_{n(j)}),b^{m}\rangle;\ m<j\}$$

Entsprechend hat man: $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{\mathrm{Re}\ \langle T(h_{n_k}),b^{m_i}\rangle;\ i>k\}$

$$\subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{\mathrm{Re}\ \langle T(h_{n(j)}),b^{m}\rangle;\ m>j\} \quad .$$

Schreiben wir statt $(b^{m_i})_{i\in\mathbb{N}}$ erneut $(b^m)_{m\in\mathbb{N}}$, so ergibt sich:

(6) $\inf\{\mathrm{Re}\ \langle T(h_{n_k}),b^m\rangle;\ m<k\} > \sup\{\mathrm{Re}\ \langle T(h_{n_k}),b^m\rangle;m>k\} + \Theta$

Weil $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}$ ein τ-Cauchy-Netz darstellt, existiert ein $\alpha_0 \in \mathcal{J}$, so daß für alle $\alpha,\beta \geqq \alpha_0$:

(7) $\sup\limits_{g\in D} |\langle f_\alpha - f_\beta,g\rangle| < \frac{\Theta}{8}$.

Nach Definition des Vektormaßes m gibt es ferner für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $\alpha_k \geqq \alpha_0$ mit:

(8) $\|h_{n_k} - \mathbb{E}_{\pi_{n_k}}(f_{\alpha_k})\|_1 < \frac{\Theta}{8}$

Nun haben wir für $\Sigma_0 := \sigma\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \pi_{n_k}\right)$ $\mathbb{E}_{\pi_{n_k}} f_{\alpha_0} \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{k\to\infty} \mathbb{E}_{\Sigma_0} f_{\alpha_0}$ und damit ist $(\mathbb{E}_{\pi_{n_k}} f_{\alpha_0})_{k\in\mathbb{N}}$ relativ σ'-kompakt. Berücksichtigt man, daß T σ'-$\sigma(c_0,\ell_1)$-stetig ist, (vgl. Bemerkung (2.1.11.)), so folgt nach [30, S.101, Th. 1], daß

(9) $\inf\{\mathrm{Re}\ \langle T(\mathbb{E}_{\pi_{n_k}} f_{\alpha_0}),b^m\rangle;\ m<k\} \leqq \sup\{\mathrm{Re}\ \langle T(\mathbb{E}_{\pi_{n_k}},f_{\alpha_0}),b^m\rangle;m>k\}$.

Andererseits haben wir aber für $m, k \in \mathbb{N}$:

$$|\mathrm{Re}\ \langle T(h_{n_k}) - T(\mathbf{E}_{\pi_{n_k}} f_{\alpha_0}), b^m\rangle| \quad =$$

$$|\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{\infty} b_j^m \langle h_{n_k} - \mathbf{E}_{\pi_{n_k}} f_{\alpha_0}, g_j\rangle| \quad =$$

$$|\mathrm{Re}\ \langle h_{n_k} - \mathbf{E}_{\pi_{n_k}} f_{\alpha_0}, \sum_{j=1}^{\infty} b_j^m g_j\rangle| \quad \leq$$

$$|\mathrm{Re}\ \langle h_{n_k} - \mathbf{E}_{\pi_{n_k}} f_{\alpha_k}, \sum_{j=1}^{\infty} b_j^m g_j\rangle| \quad +$$

$$|\mathrm{Re}\ \langle \mathbf{E}_{\pi_{n_k}} f_{\alpha_k} - \mathbf{E}_{\pi_{n_k}} f_{\alpha_0}, \sum_{j=1}^{\infty} b_j^m g_j\rangle| < \qquad \text{(nach (8))}$$

$$\frac{\Theta}{8} + |\mathrm{Re}\ \langle f_{\alpha_k} - f_{\alpha_0}, \sum_{j=1}^{\infty} b_j^m \mathbf{E}_{\pi_{n_k}} g_j\rangle| <$$

$$\frac{\Theta}{8} + |\mathrm{Re}\ \langle f_{\alpha_k} - f_{\alpha_0}, \sum_{j=1}^{n_k-1} b_j^m g_j\rangle| < \frac{\Theta}{8} + \frac{\Theta}{8} = \frac{\Theta}{4} \qquad \text{(nach (7))}\ .$$

Dies bedeutet mit (6):

$$\inf\{\mathrm{Re}\ \langle T(\mathbf{E}_{\pi_{n_k}} f_{\alpha_0}), b^m\rangle;\ m < k\} >$$

$$\sup\{\mathrm{Re}\ \langle T(\mathbf{E}_{\pi_{n_k}} f_{\alpha_0}), b^m\rangle;\ m > k\} + \frac{\Theta}{2}\ ,$$

was im Widerspruch zu (9) steht.

Damit ist $T\left(\left\{h_n = \sum_{A\in\pi_n} \frac{m(A)}{\mu(A)} \chi_A\right\}\right)$ relativ schwach kompakt, und wir erhalten insgesamt:

Es gibt ein $f \in L_1(\mu,X)$, so daß für alle $A \in \Sigma$

$$m(A) = \int_A f\, d\mu\ .$$

3. Schritt: Es bleibt zu zeigen, daß $f_\alpha \xrightarrow{\alpha \in \mathcal{J}} f$ in $(L_1(\mu,X),\tau)$ gilt. Hierzu seien $U \subset L_\infty(\mu,X')$ absolut konvex und σ^*-kompakt, sowie $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann finden wir ein $\alpha_0 \in \mathcal{J}$, so daß für alle $\alpha,\beta \geq \alpha_0$:

(10) $\sup\limits_{g\in U} |\langle f_\alpha - f_\beta, g\rangle| < \frac{\varepsilon}{5}$.

Wir wählen nun ein $g \in U$, dann gibt es nach ((1.3.2.1.) ii)) eine separable Teil-σ-Algebra $\Sigma_0 \in \Sigma$ und eine aufsteigende Σ-Zerlegung $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die (1.3.1.11) erfüllt, so daß $\mathbf{E}^X_{\Sigma_0} f = f$ und $\mathbf{E}^{X'}_{\Sigma_0} g = g$ gilt. Die Menge $\{\mathbf{E}_{\pi_n} g;\ n \in \mathbb{N}\}$ ist relativ σ^*-kompakt $\Big($denn $\mathbf{E}^{X'}_{\Sigma_0} g = g$, und für alle $\tilde{f} \in L_1(\mu,X)$ gilt $\mathbf{E}^X_{\pi_n} \tilde{f} \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{n\to\infty} \mathbf{E}^X_{\Sigma_0} \tilde{f}\Big)$, also muß nach Korollar (2.2.3.) $D := \overline{\mathrm{aco}}^{\sigma^*} \{\mathbf{E}^{X'}_{\pi_n} g;\ n \in \mathbb{N}\}$ σ^*-kompakt sein.

Wir wählen nun ein $\alpha_1 \geq \alpha_0$ derart, daß für alle $\alpha,\beta \geq \alpha_1$:

(11) $\sup\limits_{h\in D} |\langle f_\alpha - f_\beta, h\rangle| < \frac{\varepsilon}{5}$.

Es existiert ferner ein $n \in \mathbb{N}$ mit:

(12) $\|f - \mathbf{E}^X_{\pi_n} f\| < \frac{\varepsilon}{5}$ und $\|\mathbf{E}^X_{\Sigma_0} f_{\alpha_1} - \mathbf{E}^X_{\pi_n} f_{\alpha_1}\|_1 < \frac{\varepsilon}{5}$.

Aufgrund der Definition des Vektormaßes m und des 2. Schrittes gibt es ein $\alpha_2 \geq \alpha_1$, so daß für alle $\alpha \geq \alpha_2$:

(13) $\|\mathbf{E}^X_{\pi_n} f - \mathbf{E}^X_{\pi_n} f_\alpha\|_1 < \frac{\varepsilon}{5}$ gilt.

Nach Satz (2.2.2.) ist jede σ^*-kompakte Teilmenge $\|\cdot\|_\infty$-beschränkt. Deshalb können wir o.E. annehmen, daß $\sup\limits_{h\in U} \|h\|_\infty \leq 1$ ist. Für alle $\alpha \geq \alpha_0$ gilt:

$$|\langle f - f_\alpha, g\rangle| \leq |\langle f - \mathbf{E}^X_{\pi_n} f, g\rangle| + |\langle \mathbf{E}^X_{\pi_n} f - \mathbf{E}^X_{\pi_n} f_{\alpha_2}, g\rangle|$$

$$+ |\langle \mathbf{E}^X_{\pi_n} f_{\alpha_2} - \mathbf{E}^X_{\pi_n} f_{\alpha_1}, g\rangle| + |\langle \mathbf{E}^X_{\pi_n} f_{\alpha_1} - f_{\alpha_1}, g\rangle|$$

$$+ |\langle f_{\alpha_1} - f_\alpha, g\rangle|$$

(nach (12),(13) bzw. (10))

$$< \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + |\langle \mathbf{E}^X_{\pi_n} f_{\alpha_2} - \mathbf{E}^X_{\pi_n} f_{\alpha_1}, g\rangle| +$$

$$+ |\langle \mathbf{E}^X_{\pi_n} f_{\alpha_1} - f_{\alpha_1}, g\rangle| + \frac{\varepsilon}{5}$$

(nach (11),(12) und $\mathbf{E}^{X'}_{\Sigma_0} g = g$)

$$< \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

Da α_0 unabhängig von g gewählt wurde (vgl. (10)), haben wir $\sup_{g \in U} |\langle f - f_\alpha, g\rangle| \leq \varepsilon$ für $\alpha \geq \alpha_0$ und $f_\alpha \xrightarrow[\alpha \in \mathcal{J}]{\tau} f$.

II) Wir gehen jetzt zur Betrachtung eines beliebigen positiven strikt lokalisierbaren Maßraumes über. Es sei $(A_\iota)_{\iota \in I} \subset \Sigma_e$ gemäß Definition (1.3.3.6.) dem Maßraum (S,Σ,μ) zugeordnet. Die Abbildungen $R_{A_\iota}: L_1(\mu,X) \to L_1(\mu_{|A_\iota},X)$ sind τ-τ_{A_ι}-stetig. (vgl. (1.3.4.4.) bzw. [33, S.262, Th. 21.4]), und somit bildet für $\iota \in I$ $(R_{A_\iota}(f_\alpha))_{\alpha \in \mathcal{J}}$ ein τ_{A_ι}-Cauchy-Netz. Nach I) gibt es für $\iota \in I$ ein $f^\iota \in L_1(\mu_{|A_\iota},X)$ derart, daß

(14) $R_{A_\iota}(f_\alpha) \xrightarrow[\alpha \in \mathcal{J}]{\tau_{A_\iota}} f^\iota$ gilt.

Zuerst wollen wir $(\|f^\iota\|_{1,A_\iota})_{\iota \in I} \in \ell_1(I)$ zeigen.

Ist $M := \sup_{\alpha \in \mathcal{J}} \|f_\alpha\|_1$, so ist aufgrund der Isometrie in (2.1.3.) für alle endlichen Teilmengen $E \subset I$: $\sup_{\alpha \in \mathcal{J}} \sum_{\iota \in E} \|R_{A_\iota} f_\alpha\| \leq M$.

Andererseits ist für $\iota \in I$ $L_\infty(\mu_{|A_\iota},X')$ normierend für $L_1(\mu_{|A_\iota},X)$, so daß für alle endlichen $E \subset I$: $\sum_{\iota\in E} \|f^\iota\|_{1,A_\iota} \leq \sup_{\alpha\in\mathcal{J}} \sum_{\iota\in E} \|R_{A_\iota}(f_\alpha)\|_{1,A_\iota} \leq M$.

Aufgrund der Isometrie J aus Korollar (2.1.3.) gibt es dann ein $f \in L_1(\mu,X)$, so daß für alle $\iota \in I$

(15) $f^\iota = R_{A_\iota} f$.

Schließlich müssen wir noch nachweisen, daß $f_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\mathcal{J}]{\tau} f$ gilt. Dazu wählen wir eine absolut konvexe, σ^*-kompakte Teilmenge $U \subset L_\infty(\mu,X')$ und ein $\varepsilon > 0$. Weiter nehmen wir nach Satz (2.2.2. b) an, daß $\sup_{g\in U} \|g\|_\infty \leq 1$ ist. Es gibt nun ein $\alpha_0 \in \mathcal{J}$, so daß für $\alpha,\beta \geq \alpha_0$ und $g \in U$:

(16) $|\langle f_\alpha - f_\beta, g\rangle| < \frac{\varepsilon}{5}$.

Für ein festes $g \in U$ gilt nach Satz (2.2.2. b), daß die Menge $\{\sum_{\iota\in E} g\,\chi_{A_\iota}\,;\, E \subset I \text{ endlich}\}$ relativ σ^*-kompakt ist. Setzen wir $D := \overline{\mathrm{aco}}^{\sigma^*} \{\sum_{\iota\in E} g\,\chi_{A_\iota}\,;\, E \subset I \text{ endlich}\}$, so ist D nach Korollar (2.2.3.) σ^*-kompakt. Damit existiert ein $\alpha_1 \geq \alpha_0$ derart, daß für alle $\alpha,\beta \geq \alpha_1$:

(17) $\sup_{h\in D} |\langle f_\alpha - f_\beta, h\rangle| < \frac{\varepsilon}{5}$ gilt.

Aufgrund der Isometrie J aus Korollar (2.1.3.) läßt sich eine endliche Teilmenge $E \subset I$ derart finden, daß

(18) $\sum_{\iota\in I\setminus E} \|f\,\chi_{A_\iota}\|_1 < \frac{\varepsilon}{5}$ und $\sum_{\iota\in I\setminus E} \|f_{\alpha_1}\,\chi_{A_\iota}\|_1 < \frac{\varepsilon}{5}$.

Nach (14) und (15) sei $\alpha_2 \geq \alpha_1$, so daß für alle $\alpha \geq \alpha_2$:

(19) $|\langle \sum_{\iota\in E} f\,\chi_{A_\iota} - \sum_{\iota\in E} f_\alpha\,\chi_{A_\iota}, g\rangle| < \frac{\varepsilon}{5}$.

Fügen wir diese Ergebnisse zusammen, so erhalten wir für alle $\alpha \geq \alpha_0$:

$$
\begin{aligned}
|\langle f - f_\alpha, g\rangle| &\leq |\langle f - \sum_{l\in E} f\,\chi_{A_l}, g\rangle| + |\langle \sum_{l\in E} (f - f_{\alpha_2})\chi_{A_l}, g\rangle| \\
&\quad + |\langle \sum_{l\in E} (f_{\alpha_2} - f_{\alpha_1})\chi_{A_l}, g\rangle| \\
&\quad + |\langle \sum_{l\in E} f_{\alpha_1}\chi_{A_l} - f_{\alpha_1}, g\rangle| + |\langle f_{\alpha_1} - f_\alpha, g\rangle| \\
\text{nach (19) und (16)} \quad &< |\langle \sum_{l\in I\setminus E} f\,\chi_{A_l}, g\rangle| + \frac{\varepsilon}{5} \\
&\quad + |\langle f_{\alpha_2} - f_{\alpha_1}, \sum_{l\in E} g\,\chi_{A_l}\rangle| \\
&\quad + |\langle \sum_{l\in I\setminus E} f_{\alpha_1}\chi_{A_l}, g\rangle| + \frac{\varepsilon}{5} \\
\text{nach (18) und (17)} \quad &< \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon .
\end{aligned}
$$

Dies bedeutet, da α_0 unabhängig von g gewählt werden konnte: Für alle $\alpha \geq \alpha_0$ $\sup_{g\in\mathcal{E}} |\langle f - f_\alpha, g\rangle| \leq \varepsilon$, also $f_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\mathcal{J}]{\tau} f$. □

Wir wollen diesen Paragraphen mit einer Betrachtung der relativ τ-kompakten Teilmengen abschließen.

<u>(2.2.7.) Lemma:</u> Es sei (S,Σ,μ) ein positiver endlicher Maßraum. Für eine Teilmenge $K \subset L_1(\mu,X)$ sind äquivalent:

a) K ist relativ τ-kompakt.

b) i) Für alle $A \in \Sigma$ ist $I_A(K)$ relativ $\|\cdot\|$-kompakt.

ii) Für alle aufsteigenden Folgen von endlichen Σ-Zerlegungen $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und für alle σ^*-kompakten Teilmengen $C \subset L_\infty(\mu,X')$ gilt:

$$\sup_{f\in K} \sup_{g\in C} |\langle \mathbf{E}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_n} f - \mathbf{E}_{\pi_n} f, g\rangle| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

c) i) Für alle $A \in \Sigma$ ist $I_A(K)$ relativ $\|\cdot\|$-kompakt.

ii) Es gibt eine aufsteigende Folge endlicher Σ-Zerlegungen $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß für alle σ^*-kompakten Teilmengen $C \subset L_\infty(\mu,X')$ gilt:

$$\sup_{f\in K}\sup_{g\in C} |\langle f - \mathbf{E}_{\pi_n} f,g\rangle| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Insbesondere ist jede relativ τ-kompakte Teilmenge von $L_1(\mu,X)$ $\|\cdot\|_1$-separabel.

Beweis:

a) $\Rightarrow$ b): Für alle $A \in \Sigma$ ist $I_A : (L_1(\mu,X),\tau) \to (X,\|\cdot\|)$ stetig. (vgl. (1.3.4.3.) bzw. [33, S.202, Th. 21.4]). Somit gilt i) aufgrund der Voraussetzung a). Teil ii) ergibt sich aus folgender Überlegung: Definiert man für eine aufsteigende Folge $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von endlichen Σ-Partitionen $\Sigma_0 := \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_n)$, so erhalten wir $\mathbf{E}_{\pi_n} f \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{E}_{\Sigma_0} f$ in $(L_1(\mu,X),\|\cdot\|_1)$. Ferner sind für $n \in \mathbb{N}$ $\mathbf{E}_{\pi_n}$ und $\mathbf{E}_{\Sigma_0}$ Kontraktionen auf $L_\infty(\mu,X')$ (vgl. (1.3.5.4.)). Damit ist für jede relativ σ^*-kompakte Teilmenge $V \subset L_\infty(\mu,X')$ $\mathbf{E}_{\Sigma_0}(V) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}_{\pi_n}(V)$ relativ σ^*-abzählbar kompakt, also ebenfalls relativ σ^*-kompakt (vgl. Korollar (2.2.4.)). Wendet man [42, S.83, 4.1.] an, so ergibt sich die τ-Gleichstetigkeit von $(\mathbf{E}_{\pi_n}; n \in \mathbb{N})$. [42, S.84, 4.3] zeigt somit, daß $\mathbf{E}_{\pi_n} f \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{E}_{\Sigma_0} f$ gleichmäßig auf K in $(L_1(\mu,X),\tau)$ konvergiert.

b) $\Rightarrow$ a): Wir wissen nach Satz (2.1.6. b), daß $(L_1(\mu,X),\sigma')$ angelisch ist. Mit [21, S.31, 3.3. Th.(2)] ist $(L_1(\mu,X),\tau)$ ebenfalls angelisch. Somit bleibt nach [21, S.31, 3.3. Th.(1)] nachzuweisen, daß K relativ τ-folgenkompakt ist.

K ist $\|\cdot\|_1$-beschränkt: Dazu sei $K_0 \subset K$ separabel; dann gibt es eine aufsteigende Zerlegungsfolge $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß für alle $f \in K_0$

gilt: $\mathbb{E}_{\pi_n} f \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ in $(L_1(\mu,X),\|\cdot\|_1)$. Nach i) ist für alle $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{E}_{\pi_n}(K_0)$ relativ $\|\cdot\|_1$-kompakt und somit $\|\cdot\|_1$-beschränkt. Berücksichtigt man noch ii), so folgt für alle $g \in L_\infty(\mu,X')$: $\sup_{f\in K_0} |\langle f,g\rangle| < \infty$. Mit dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit und der normierenden Eigenschaft von $L_\infty(\mu,X')$ ist dann K_0 beschränkt und damit auch K. Andererseits wissen wir nach Satz (2.2.6.), daß $(K,\tau \cap K)$ vollständig ist, so daß K genau dann relativ τ-kompakt ist, wenn K bedingt τ-folgenkompakt ist. Es seien also $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ und $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ eine aufsteigende Folge von endlichen Σ-Zerlegungen, so daß für $\Sigma_0 := \sigma(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \pi_k)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{E}_{\Sigma_0} f_n = f_n$ gilt. Nach i) gibt es eine Teilfolge $(f_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß $(\mathbb{E}_{\pi_1} f_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bildet. Induktiv findet man für $m \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge $(f_n^{m+1})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n^m)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß für alle $k \leq m+1$ $(\mathbb{E}_{\pi_k} f_n^{m+1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(L_1(\mu,X),\|\cdot\|_1)$ darstellt. Mit dem Diagonalverfahren finden wir dann eine Teilfolge $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ $(\mathbb{E}_{\pi_k} f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_1$-Cauchyfolge ist. Es sei nun $C \subset L_\infty(\mu,X')$ σ^*-kompakt, $C = \operatorname{aco} C$, so gibt es nach ii) zu $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$, derart, daß

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} |\langle f_{n_j} - \mathbb{E}_{\pi_k} f_{n_j}, g\rangle| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } g \in C .$$

Nun ist $(\mathbb{E}_{\pi_k} f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_1$-Cauchyfolge und C $\|\cdot\|_\infty$-beschränkt, so daß es ein $j_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\sup_{i,j\geq j_0} |\langle \mathbb{E}_{\pi_k} f_{n_i} - \mathbb{E}_{\pi_k} f_{n_j}, g\rangle| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } g \in C .$$

Wir erhalten somit für $i,j \geq j_0$:

$$|\langle f_{n_i} - f_{n_j}, g\rangle| \leq |\langle f_{n_i} - \mathbf{E}_{\pi_k} f_{n_i}, g\rangle| + |\langle \mathbf{E}_{\pi_k} f_{n_i} - \mathbf{E}_{\pi_k} f_{n_j}, g\rangle| + \\ + |\langle \mathbf{E}_{\pi_k} f_{n_j} - f_{n_j}, g\rangle| < \varepsilon,$$

für alle $g \in C$ und K ist bedingt τ-folgenkompakt.

a) $\Rightarrow$ c): Wir zeigen, daß jede relativ τ-kompakte Teilmenge $K \subset L_1(\mu,X)$ $\|\cdot\|_1$-separabel ist. Dann gibt es eine aufsteigende Folge $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von endlichen Σ-Zerlegungen, so daß mit $\Sigma_0 := \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_n)$ $\mathbf{E}_{\Sigma_0} f = f$ für alle $f \in K$ gilt, und die Implikation "a) $\Rightarrow$ c)" folgt mit der Argumentation aus "a) $\Rightarrow$ b)". Ist also K relativ τ-kompakt, so ist $\bar{K}^{\sigma'}$ σ'-kompakt, und es gibt nach Satz (2.1.5.) eine Menge Γ und eine lineare, σ'-$\sigma(c_0(\Gamma),\ell_1(\Gamma))$-stetige injektive Abbildung $T : \overline{\text{span}}^{\sigma'} K \to c_0(\Gamma)$. Nach [33, S.202, Th. 21.4.] ist T $\tau \cap L$-$\|\cdot\|_\infty$-stetig. Da T injektiv ist und $\bar{K}^\tau \subset \bar{K}^{\sigma'}$ gilt, ist $T_{|\bar{K}^\tau}$ ein τ-$\|\cdot\|_\infty$-Homöomorphismus. Nun ist jede normkompakte Menge separabel, also muß auch K τ-separabel sein. τ-separable Teilmengen sind natürlich auch σ'-separabel und es gibt einen separablen abgeschlossenen Teilraum $X_0 \subset X$ und eine separable Teil-σ-Algebra $\Sigma_0 \subset \Sigma$ mit $K \subset L_1(S,\Sigma_0,\mu_{|\Sigma_0},X_0)$ (vgl. (1.3.6.3.)). $L_1(S,\Sigma_0,\mu_{|\Sigma_0},X_0)$ ist $\|\cdot\|_1$-separabel (vgl. (1.3.6.4.)).

c) $\Rightarrow$ a): Die Argumentation aus der Implikation "b) $\Rightarrow$ a)" läßt sich wörtlich übernehmen, wenn man folgendes beobachtet: Ist $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die aufsteigende Folge von endlichen Σ-Zerlegungen aus c) ii) und $\Sigma_0 := \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_n)$, so gilt für $f \in K$: $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{E}_{\Sigma_0} f - \mathbf{E}_{\pi_n} f\|_1 = 0$ und $\mathbf{E}_{\Sigma_0} f = f$. □

Die im Lemma (2.2.7.) angegebene Charakterisierung für relativ τ-kompakte Teilmengen $K \subset L_1(\mu,X)$ ist der für relativ normkompakte Teilmengen eng verwandt (vgl. [28, S.63, 3.17]). Der nachfolgende Satz wird zeigen, daß

im Falle eines positiven Maßraumes gemäß (1.3.3.5.) relativ τ-kompakte Teilmengen schon relativ normkompakt sind, auch wenn X' nicht die RNP bezüglich (S,Σ,μ) besitzt. (z.B. für $X := \ell_1$ und $(S,\Sigma,\mu) := ([0,1], \mathfrak{L},\lambda)$).

<u>(2.2.8.) Satz:</u> Ist (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.), so sind alle relativ τ-kompakten Teilmengen $K \subset L_1(\mu,X)$ bereits relativ $\|\cdot\|_1$-kompakt.

<u>Beweis:</u>

<u>1. Schritt:</u> Wir betrachten hier einen endlichen, positiven Maßraum (S,Σ,μ). Man wähle eine relative τ-kompakte Teilmenge $K \subset L_1(\mu,X)$ und nehme an, daß K nicht relativ $\|\cdot\|_1$-kompakt ist. Somit gilt nach [28, S.63, Satz 3.17]: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, eine Folge aufsteigender endlicher Σ-Zerlegungen $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$, so daß für $\Sigma_0 := \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_n)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(*) \quad \|\mathbb{E}_{\Sigma_0} f_n - \mathbb{E}_{\pi_n} f_n\|_1 > \varepsilon.$$

(man beachte, daß nach Lemma (2.2.7.) $I_A(K)$ relativ normkompakt für alle $A \in \Sigma$ ist). Nun ist $\mathbb{E}_{\Sigma_0}$ eine σ'-σ'-stetige Abbildung und somit nach [33, S. 202, Th. 21.4.] auch τ-τ-stetig. Also können wir annehmen, daß $\mathbb{E}_{\Sigma_0} f = f$ für alle $f \in K$ gilt.

Wir wählen nun induktiv eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\|\mathbb{E}_{\pi_{n_{k+1}}} f_{n_k} - \mathbb{E}_{\pi_{n_k}} f_{n_k}\|_1 > \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{aus.}$$

Für $k = 1$ setzen wir $n_1 := 1$ und wählen $n_2 > 1$, so daß $\|f_1 - \mathbb{E}_{\pi_{n_2}} f_1\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Dann erhalten wir mit der Annahme (*)

$$\|\mathbf{E}_{\pi_{n_2}} f_1 - \mathbf{E}_{\pi_{n_1}} f_1\| > \frac{\varepsilon}{2}$$

Ist nun n_{k+1} für ein k bereits gewählt, so sei $n_{k+2} > n_{k+1}$ derart, daß $\|\mathbf{E}_{\pi_{n_{k+2}}} f_{n_{k+1}} - f_{n_{k+1}}\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Mit (*) erhält man dann erneut:

$$\|\mathbf{E}_{\pi_{n_{k+2}}} f_{n_{k+1}} - \mathbf{E}_{\pi_{n_{k+1}}} f_{n_{k+1}}\| > \frac{\varepsilon}{2} .$$

Wir wissen, daß $L_\infty(\mu,X')$ normierend für $L_1(\mu,X')$ ist. Deshalb gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $g_k \in L_\infty(\mu,X'), \|g_k\|_\infty \leq 1$, mit:

$$|\langle f_{n_k}, (\mathbf{E}_{\pi_{n_{k+1}}} - \mathbf{E}_{\pi_{n_k}})(g_k)\rangle| = |\langle (\mathbf{E}_{\pi_{n_{k+1}}} - \mathbf{E}_{\pi_{n_k}})(f_{n_k}), g_k\rangle| > \frac{\varepsilon}{2} .$$

Es gilt: $(\mathbf{E}_{\pi_{n_{k+1}}} - \mathbf{E}_{\pi_{n_k}})(g_k) \xrightarrow[\sigma^*]{k\to\infty} 0$, denn:

Sei $f \in L_1(\mu,X)$ und $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geq k_0$ $\|\mathbf{E}_{\pi_{n_{k+1}}} f - \mathbf{E}_{\pi_{n_k}} f\|_1 < \varepsilon$. Weil $\|g_k\|_\infty \leq 1$ $(k \in \mathbb{N})$, hat man für $k \geq k_0$

$$\begin{aligned} |\langle f, (\mathbf{E}_{\pi_{n_{k+1}}} - \mathbf{E}_{\pi_{n_k}})(g_k)\rangle| &= |\langle (\mathbf{E}_{\pi_{n_{k+1}}} - \mathbf{E}_{\pi_{n_k}})(f), g_k\rangle| \\ &\leq \|\mathbf{E}_{\pi_{n_{k+1}}} f - \mathbf{E}_{\pi_{n_k}} f\|_1 < \varepsilon . \end{aligned}$$

Setzt man nun $C := \{(\mathbf{E}_{\pi_{n_{k+1}}} - \mathbf{E}_{\pi_{n_k}})(g_k);\ k \in \mathbb{N}\}^{-\sigma^*}$, so erhält man insgesamt für $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sup_{f\in K} \sup_{h\in C} |\langle f - \mathbf{E}_{\pi_{n_j}} f, h\rangle| &\geq \sup_{k\in\mathbb{N}} |\langle f_{n_k} - \mathbf{E}_{\pi_{n_j}} f_{n_k}, (\mathbf{E}_{\pi_{n_{k+1}}} - \mathbf{E}_{\pi_{n_k}})(g_k)\rangle| \\ &\geq |\langle (\mathbf{E}_{\pi_{n_{j+1}}} - \mathbf{E}_{\pi_{n_j}})(f_{n_j}), g_j\rangle| \geq \frac{\varepsilon}{2} . \end{aligned}$$

Dies steht aber im Widerspruch zum Lemma (2.2.7.).

2. Schritt: Es sei nun (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.). Ferner nehmen wir an, $K \subset L_1(\mu,X)$ sei relativ τ-kompakt, aber nicht $\|\cdot\|_1$-kompakt. Dann gibt es eine τ-konvergente Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$, die keine $\|\cdot\|_1$-konvergente Teilfolge besitzt (man beachte, daß $(L_1(\mu,X),\tau)$ nach Satz (2.1.6.) angelisch ist, und somit relativ τ-kompakte Teilmengen auch relativ τ-folgenkompakt sind). Wir können o.E. annehmen, daß $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau} 0$ gilt. Nun gibt es ein $S' \in \Sigma$ derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ $R_{S\setminus S'}(f_n) = 0$, und $(S',\Sigma \cap S'_{\mu|_{\Sigma\cap S'}})$ ist σ-finit (vgl. (1.3.3.1.)). Die Abbildung $R_{S'} : L_1(\mu,X) \to L_1(S',\Sigma \cap S',\mu_{|\Sigma\cap S'},X)$ ist σ'-σ'_S-stetig und daher (vgl. [33, S.262, Th. 21.4]) τ-$\tau(L_1(\mu_{|S'},X),L_\infty(\mu_{|S'},X'))$-stetig. Also können wir (S,Σ,μ) als σ-finiten Maßraum annehmen. Nach Definition gibt es eine paarweise disjunkte Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_e$ mit $S = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Setzen wir für $k \in \mathbb{N}$ $\tau_{A_k} := \tau(L_1(\mu_{|A_k},X),L_\infty(\mu_{|A_k},X'))$, so haben wir aufgrund der τ-τ_{A_k}-Stetigkeit von R_{A_k} (vgl. [33, S.263, Th. 21.4])

$$R_{A_k}(f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_{A_k}} 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Nach dem 1. Schritt findet man für alle $m \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge $(f_n^m)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß für alle $k \leq m$

$$R_{A_k}(f_n^m) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{1,A_k}} 0. \text{ Also gilt auch } f_n^m \chi_{A_k} \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_1} 0 \text{ für } k \leq m.$$

Durch ein Diagonalverfahren erhält man eine Teilfolge $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, daß für alle $k \in \mathbb{N}$

$$f_{n_j} \chi_{A_k} \xrightarrow[j\to\infty]{\|\cdot\|_1} 0 \quad \text{gilt.}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise nehmen wir $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}} = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine $\|\cdot\|_1$-konvergente Teilfolge besitzt, gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$: $\|f_n\|_1 > \varepsilon$. Dies ist aber gleichbedeutend mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_n \chi_{A_k}\|_1 > \varepsilon$ für $n \geq n_0$.

Wir wenden nun die Methode des "wandernden Buckels" an, um den Widerspruch herzuleiten. Dazu weisen wir die Existenz streng monoton wachsender Folgen $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}, (n_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ nach mit den Eingeschaften $(r_0 := 0)$:

$$\sum_{k=1}^{r_j-1} \|f_{n_j} \chi_{A_k}\|_1 < \frac{\varepsilon}{5}, \quad \sum_{k=r_{j-1}+1}^{r_j} \|f_{n_j} \chi_{A_k}\|_1 > \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und}$$

$$\sum_{k=r_j+1}^{\infty} \|f_{n_j} \chi_{A_k}\|_1 < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach $j \in \mathbb{N}$:

<u>Induktionsanfang: $j = 1$:</u> Es sei $n_1 := n_0$. Dann gilt nach Annahme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_1} \chi_{A_k}\| > \varepsilon .$$

Also findet man ein $r_1 \in \mathbb{N}$ derart, daß $\sum_{k=1}^{r_1} \|f_{n_1} \chi_{A_k}\|_1 > \frac{\varepsilon}{2}$ und

$$\sum_{k=r_1+1}^{\infty} \|f_{n_1} \chi_{A_k}\|_1 < \frac{\varepsilon}{5} .$$

<u>Induktionsannahme:</u> Für ein $j \in \mathbb{N}$ seien $r_1, \ldots, r_j$ bzw. $n_1, \ldots, n_j$ bereits konstruiert.

<u>Induktionsschluß:</u> Da für alle $k \in \mathbb{N}$ $\|f_n \chi_{A_k}\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt, kann man ein $n_{j+1} > n_j$ auswählen, so daß man für alle $n \geq n_{j+1}$

$\sum_{k=1}^{r_j-1} \|f_n \chi_{A_k}\|_1 < \frac{\varepsilon}{5}$ hat. Dann gibt es auch ein $r_{j+1} > r_j$, so daß

$$\sum_{k=r_j+1}^{r_{j+1}} \|f_{n_{j+1}} \chi_{A_k}\|_1 > \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{k=r_{j+1}}^{\infty} \|f_{n_{j+1}} \chi_{A_k}\| < \frac{\varepsilon}{5} .$$

Setze nun $B_j := \bigcup_{k=r_{j-1}+1}^{r_j} A_k$ $(r_0 = 0)$. Die Folge $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ besteht aus paarweise disjunkten Mengen. Dies ergibt sich aus der Wahl der Folgen $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ (strenge Monotonie) und der Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (die $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sind paarweise disjunkt). Wegen der normierenden Eigenschaft von $L_\infty(\mu,X')$ (1.3.4.1.) gibt es zu $j \in \mathbb{N}$ ein $g_j \in L_\infty(\mu,X')$ mit $g_j = g_j \chi_{B_j}$ und $\|g_j\|_\infty \leq 1$, so daß $|\langle \sum_{k=r_{j-1}+1}^{r_j} f_{n_j} \chi_{A_k}, g_j\rangle| > \frac{\varepsilon}{2}$ gilt.

Setzen wir $g := \sum_{j=1}^{\infty} g_j \in L_\infty(\mu,X')$, so haben wir für $j \in \mathbb{N}$

$$|\langle f_{n_j},g\rangle| \geq |\langle \sum_{k=r_{j-1}+1}^{r_j} f_{n_j} \chi_{A_k},g\rangle| - \sum_{k=1}^{r_j-1} \|f_{n_j} \chi_{A_k}\|_1$$

$$- \sum_{k=r_j+1}^{\infty} \|f_{n_j} \chi_{A_k}\|_1 > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{5} - \frac{\varepsilon}{5} = \frac{\varepsilon}{10} .$$

Dies bedeutet, daß $f_{n_j} \underset{j\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$ in der σ'-Topologie, also insbesondere nicht in $(L_1(\mu,X),\tau)$, was aber im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Also ist K relativ $\|\cdot\|_1$-kompakt. □

Wir wissen, daß für einen endlichen Maßraum (S,Σ,μ) die σ'-Topologie mit der schwachen Topologie genau dann zusammenfällt, wenn X' die RNP bezüglich (S,Σ,μ) besitzt. Falls X' also nicht die RNP bezüglich (S,Σ,μ) hat, folgt aus dem Theorem von Mackey-Ahrens (vgl. [36, S.262, § 21.4(2)]), daß die Mackey-Topologie echt gröber als die $\|\cdot\|_1$-Topologie ist. In diesem Fall ist die Mackey-Topologie sogar nicht einmal metrisierbar. Es gilt nämlich das folgende Korollar.

(2.2.9.) Korollar: Ist (S,Σ,μ) ein endlicher positiver Maßraum, so ist $(L_1(\mu,X),\tau)$ genau dann metrisierbar, wenn X' die RNP bezüglich (S,Σ,μ) besitzt.

Beweis: Falls $(L_1(\mu,X),\tau)$ metrisierbar ist, so erhalten wir aus dem vorhergehenden Satz die Stetigkeit der Abbildung

$$\mathrm{id}: (L_1(\mu,X),\tau) \longrightarrow (L_1(\mu,X),\|\cdot\|_1).$$

Damit fallen also die Mackey-Topologie und die $\|\cdot\|_1$-Topologie zusammen, welches auch die Gleichheit der σ'- und der schwachen Topologie impliziert. X' besitzt also die RNP bezüglich (S,Σ,μ) (vgl. [15, S.98, Th. 1]). Besitzt X' die RNP bezüglich (S,Σ,μ), so hat man die Gleichheit der τ- und der $\|\cdot\|_1$-Topologie (vgl. [15, S.98, Th. 1] und [33, S.262, 21.4.(2)]). Somit ist $(L_1(\mu,X),\tau)$ metrisierbar. □

Wir wollen abschließend noch ein Kriterium für die relativ $\|\cdot\|_1$-kompakten Teilmengen $K \subset L_1(\mu,X)$ angeben. Dazu betrachten wir für einen positiven Maßraum (S,Σ,μ) gemäß (1.3.3.5.) und für $A \in \Sigma_e$ die Menge der Operatoren $\Lambda_1^A(c_0)$.

(2.2.10.) Korollar: Ist (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.), $(A_i)_{i\in I} \in \Sigma_e$ die maximale Familie aus (2.1.2.) und $K \subset L_1(\mu,X)$, dann sind äquivalent:

a) K ist relativ $\|\cdot\|_1$-kompakt.

b) i) Für alle $A \in \Sigma_e$ ist $I_A(K)$ relativ $\|\cdot\|_1$-kompakt.

ii) Für alle $A \in \Sigma_e$ und für alle $T \in \Lambda_1^A(c_0)$ gilt: $T(K)$ ist relativ normkompakt in c_0.

iii) Die Menge $\{(\|f\,\chi_{A_i}\|)_{i\in I};\ f \in K\} \subset \ell_1(I)$ ist relativ normkompakt.

Bemerkung: Die Bedingung iii) entfällt, falls (S,Σ,μ) ein endlicher Maßraum ist. Ebenso kann man dann ii) ersetzen durch:

ii)' Für alle $T \in \Lambda_1^S(c_0)$ ist $T(K)$ relativ normkompakt in c_0.

Beweis des Korollars: Die Notwendigkeit der Bedingung ergibt sich aus der Stetigkeit der Abbildung $I_A : L_1(\mu,X) \to X$ $(A \in \Sigma_e)$, $T \in \Lambda_1^A(c_0)$ $(A \in \Sigma_e)$ und $L_1(\mu,X) \ni f \mapsto (\|f\,\chi_{A_i}\|)_{i\in I} \in \ell_1(I)$. Um zu zeigen, daß die Bedingung auch hinreichend ist, beschränken wir uns zuerst auf den Fall eines endlichen Maßraumes (S,Σ,μ).

I) Wir wollen zeigen, daß K relativ τ-kompakt ist, denn nach Satz (2.2.8.) folgt hiermit die Aussage. Dazu verwenden wir Lemma (2.2.7.). Angenommen K ist nicht relativ τ-kompakt, so folgt mit b) i) und Lemma (2.2.7. b):

Es gibt eine aufsteigende Folge endlicher Σ-Zerlegungen $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ein $\varepsilon > 0$, eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$, eine σ^*-kompakte Teilmenge $C \subset L_\infty(\mu,X')$ und eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ derart, daß für $\Sigma_0 := \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_n)$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|\langle \mathbf{E}_{\Sigma_0} f_n - \mathbf{E}_{\pi_n} f, g_n\rangle| > \varepsilon.$$

Da C nach Lemma (2.2.2.) beschränkt ist, können wir o.E. annehmen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ $\|g_n\|_\infty \leq 1$ ist. Nach Definition von Σ_0 gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $m_n > n$ mit:

(1) $\|\mathbf{E}_{\Sigma_0} f_n - \mathbf{E}_{\pi_j} f_n\|_1 < \frac{\varepsilon}{4}$ für $j \geq m_n$.

Damit finden wir eine Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ mit $n_k < m_{n_k} \leq n_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir haben dann für $k \in \mathbb{N}$

(2) $|\langle (E_{\pi_{n_{k+1}}} - E_{\pi_{n_k}})(f_{n_k}), g_{n_k}\rangle| > \frac{3}{4}\varepsilon$

und definieren: $T : L_1(\mu,X) \to c_0$

$$f \mapsto (\langle f, (E_{\pi_{n_{k+1}}} - E_{\pi_{n_k}})(g_{n_k})\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$$

Da $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset B(L_\infty(\mu,X'))$ bzw. $\Sigma_0 = \sigma(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \pi_{n_k})$ gilt, ist $T \in \Lambda_1^S(c_0)$. Für $k \neq j$, $k,j \in \mathbb{N}$ errechnet man $\|Tf_{n_k} - Tf_{n_j}\|_\infty > \frac{\varepsilon}{2}$, denn ist $k > j$, so ist $|(Tf_j)_k| < \frac{\varepsilon}{4}$ nach (1) und

$$|(Tf_k)_k| > \frac{3}{4}\varepsilon \text{ nach (2)}.$$

Dies bedeutet aber wiederum, daß $T(K) \subset c_0$ nicht relativ normkompakt ist, was einen Widerspruch zu ii) darstellt. Damit ist zugleich gezeigt, daß man im Falle eines endlichen Maßraumes ii) durch ii)' ersetzen kann.

II) Falls (S,Σ,μ) ein nicht notwendig endlicher Maßraum ist, so zeigen wir, daß K totalbeschränkt ist. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es nach iii) eine endliche Teilmenge $E \subset I$, so daß für alle $f \in K$

(3) $\sum_{i\in I\setminus E} \|f\,\chi_{A_i}\|_1 < \frac{\varepsilon}{4}$.

Andererseits wissen wir, daß für $B := \bigcup_{i\in E} A_i$ $\{f\,\chi_B;\ f \in K\}$ relativ $\|\cdot\|_1$-kompakt ist (nach I)). Also gibt es $f_1,\ldots,f_k \in K$ derart, daß $\{f\,\chi_B;\ f \in K\} \subset \bigcup_{j=1}^{k}\{f \in L_1(\mu,X);\ \|f - f_j\,\chi_B\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}\}$

Nach (3) gilt dann:

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{k}\{f \in L_1(\mu,X);\ \|f - f_j\|_1 < \varepsilon\}. \qquad \square$$

§ 3 Reguläre Borelmasse auf $L_1(\mu,X)$ und die Radon-Nikodym-Eigenschaft

Das Hauptanliegen dieses Paragraphen ist es, $L_1(\mu,X)$-wertige Vektormaße zu charakterisieren, die eine Bochnerdichte besitzen. Dabei ist selbst, wenn X die RNP besitzt, dies keine triviale Aufgabe, denn $L_1(\mu)$ besitzt nach [14, S.61-62] genau dann die RNP bezüglich eines endlichen Maßraumes (S,Σ,μ), wenn S sich in abzählbar viele Atome zerlegen läßt. Mit der Darstellbarkeit dieser Vektormaße hat sich auch A. Costé beschäftigt. Er gibt in [11] eine Charakterisierung diffenzierbarer $L_1(\mu,X)$-wertiger Vektormaße durch die Betrachtung des projektiven Tensorproduktes $c_0 \hat{\otimes} L_1(\mu,X)$, wobei er voraussetzt, daß X die RNP besitzt. Wir werden diesen Fall ebenfalls berücksichtigen, und zeigen, daß abgeschlossene, beschränkte, konvexe und gleichgradig integrierbare Teilmengen von $L_1(\mu,X)$ die RNP besitzen, wenn X die RNP hat. Allerdings läßt sich keine Charakterisierung von abgeschlossenen, beschränkten und konvexen Mengen von $L_1(\mu,X)$, die die RNP besitzen, finden, da die entsprechende Frage schon im skalaren Fall nicht befriedigend gelöst ist. Die Darstellbarkeit von $L_1(\mu,X)$-wertigen Vektormaßen werden wir durch die Klasse von Operatoren $T \in L(L_1(\mu,X),c_0)$ charakterisieren, die wir in (2.1.) eingeführt haben. Dabei benutzen wir, ähnlich wie bei der klassischen Charakterisierung von Rieffel (vgl. [7, S.23, Th. 2.2.6.]), den Begriff des $\mathbf{P}$-durchschnittlichen Wertebereiches (vgl. (3.1.12.)), wobei wir hier "relativ schwach kompakt" durch "relativ σ'-kompakt" ersetzen können. Grundlage hierfür ist die Tatsache, daß konvexe σ'-kompakte Teilmengen die RNP besitzen.

Der Zugang zu diesem Ergebnis führt uns zur Untersuchung regulärer, endlicher Borelmaße auf $(L_1(\mu,X),\sigma')$. Wir zeigen, daß die Abbildung

id : $(L_1(\mu,X),\sigma') \to (L_1(\mu,X),\|\cdot\|_1)$ im Sinne von [44] universell meßbar ist und leiten hieraus die Fortsetzbarkeit eines endlichen regulären Borelmaßes auf $(L_1(\mu,X),\sigma')$ zu einem regulären Borelmaß auf $(L_1(\mu,X),\|\cdot\|_1)$ ab. Der Beweis für die universelle Meßbarkeit der Abbildung id : $(L_1(\mu,X),\sigma') \to (L_1(\mu,X),\|\cdot\|_1)$ macht entscheidend davon Gebrauch, daß σ'-kompakte Teilmengen Eberlein-Kompakta sind. Wir werden ferner ein Ergebnis von M. Talagrand (vgl. [50, S.205, Prop. 16-5-2]) über die Gleichheit der schwachen und der σ'-Bairemengen auf $L_1(\mu,X)$ für einen separablen σ-finiten Maßraum verallgemeinern. Schließlich wird sich als Nebenprodukt zeigen, daß die σ'-abgeschlossene, konvexe (bzw. absolut-konvexe) Hülle einer σ'-kompakten Teilmenge mit der normabgeschlossenen, konvexen (bzw. absolut-konvexen) Hülle übereinstimmt. Dieses Resultat wurde für endliche, positive Maßräume bereits in [5] hergeleitet, doch wählen wir hier einen zu [5] dualen Zugang über den Begriff der maßkonvexen Mengen.

<u>(3.1.) Definition:</u> Es seien (T_1,τ_1) bzw. (T_2,τ_2) separierte topologische Räume und $\nu \in M(T_1,\tau_1)$ (vgl. (1.4.2.)).
Eine Abbildung $J : (T_1,\tau_1) \to (T_2,\tau_2)$ heißt ν-Lusin-meßbar, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jeder τ_1-kompakten Menge $K \subset T_1$ eine weitere τ_1-kompakte Menge $K_\varepsilon \subset K$ gibt, so daß $\nu(K \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ und $J_{|K_\varepsilon}$ stetig ist.
Man nennt J universell meßbar, falls J für alle $\nu \in M(T_1,\tau_1)$ ν-Lusin-meßbar ist. (vgl. [44, S.25, Def. 9 bzw. S.38, Def. 11]).

<u>(3.2.) Bemerkung:</u>

a) Aus der Definition wird sofort klar, daß stetige Abbildungen universell meßbar sind.

b) Sind τ_1,τ_2 zwei Hausdorfftopologien auf einem Raum T, τ_1 gröber als τ_2, so ist es insbesondere interessant, ob die Abbildung $id : (T,\tau_1) \to (T,\tau_2)$ universell meßbar ist. Hieraus lassen sich unter gewissen Reguralitätseigenschaften von τ_1 und τ_2 (vgl. [44, S.170]), Rückschlüsse auf die Fortsetzbarkeit eines endlichen, regulären Borelmaßes $\nu \in M(T,\tau_1)$ zu einem Element $\tilde{\nu} \in M(T,\tau_2)$ ziehen.
So ist z.B. diese Fortsetzbarkeit möglich, falls:

I) (T,τ_2) ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum und τ_1 die schwache Topologie sind (Satz von Phillips, Dunford-Pettis und Grothendieck, vgl. [44, S.162, Th.3]).

II) (T,τ_2) ein separabler Fréchet-Raum und τ_1 irgendeine gröbere separierte Topologie auf Y sind. (vgl. [44, S.170]).

c) Wir werden mit dem in (3.1.) eingeführten Begriff und einem Theorem von E. Saab [41, S.84, Th. 9] eine Charakterisierung von $L_1(\mu,X)$-wertigen Vektormaßen finden, die eine Bochnerdichte besitzen (vgl. (3.11.) - (3.20)).

Im folgenden Lemma zeigen wir, daß $id : (L_1(\mu,X),\sigma') \to (L_1(\mu,X),\|\cdot\|_1)$ universell meßbar ist. Dazu benötigen wir zusätzlich eine Aussage über die σ'- und schwachen Bairemengen auf $L_1(\mu,X)$ im Falle eines separablen und σ-finiten Maßraumes.

<u>(3.3.) Lemma:</u>

a) Es sei (S,Σ,μ) ein positiver, separabler und σ-finiter Maßraum, dann ist $B(L_\infty^e(\mu,X'))$ $\sigma(L_1(\mu,X)',L_1(\mu,X))$ - folgendicht in $B(L_1(\mu,X)')$. Insbesondere gilt $Ba(L_1(\mu,X),\sigma') = Ba(L_1(\mu,X), \sigma(L_1(\mu,X), L_1(\mu,X)'))$.

b) Ist (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.), so ist die Abbildung $id : (L_1(\mu,X),\sigma') \longrightarrow (L_1(\mu,X),\|\cdot\|_1)$ universell meßbar.

Beweis:

a) Wenn wir gezeigt haben, daß $B(L^e_\infty(\mu,X'))$ $\sigma(L_1(\mu,X)',L_1(\mu,X))$ - folgendicht in $B(L_1(\mu,X)')$ liegt, ergibt sich nach [18, S.668 Th.2.3.] sofort $Ba(L_1(\mu,X),\sigma') = Ba(L_1(\mu,X),\sigma(L_1(\mu,X),L_1(\mu,X)'))$. Da (S,Σ,μ) als σ-finiter Maßraum vorausgesetzt war, finden wir eine paarweise disjunkte Folge $(C_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_e$ mit $S = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_m$.

Es gilt für jedes $f \in L_1(\mu,X)$:

(1) $\|f - \sum_{m=1}^{n} f\chi_{C_m}\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Wir wählen ein $G \in B(L_1(\mu,X)')$ und definieren für $m \in \mathbb{N}$ $G\chi_{C_m} \in L_1(\mu,X)'$ durch $G\chi_{C_m} : L_1(\mu,X) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \longmapsto \langle f\chi_{C_m}, G\rangle .$$

Weiter sei für $m \in \mathbb{N}$ $(\pi^m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge endlicher Σ-Zerlegungen von C_m, so daß $\|\mathbb{E}_{\pi^m_k}\bar{f} - \bar{f}\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$ für alle $\bar{f} \in L_1(C_m, \Sigma \cap C_m, \mu, X)$ gilt (eine derartige Zerlegung existiert, da (S,Σ,μ) separabel ist).

Für $f \in L_1(\mu,X)$ können wir festhalten :

$$(2) \langle f, G\chi_{C_m}\rangle = \langle f\chi_{C_m}, G\rangle = \langle e_{C_m}(R_{C_m}(f)), G\rangle =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \langle e_{C_m}(\mathbb{E}_{\pi^m_k}(R_{C_m}(f))), G\rangle =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \langle \mathbb{E}_{\pi^m_k}(R_{C_m}(f)), e^*_{C_m}(G)\rangle =$$

(dabei ist $e^*_{C_m}(G) \in L_1(\mu|_{C_m}, X)'$ nach Definition von e_{C_m})

$$= \lim_{k\to\infty} \langle R_{C_m}(f), \mathbb{E}^*_{\pi^m_k}(e^*_{C_m}(G))\rangle$$

$$\left(\mathbb{E}^*_{\pi^m_k}(e^*_{C_m}(G)) \in L_\infty(\mu_{|C_m}, X') \text{ nach } (1.3.5.5.)\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \langle f, \tilde{e}_{C_m}(\mathbb{E}^*_{\pi^m_k}(e^*_{C_m}(G))) \rangle \quad .$$

Wir setzen nun für $n \in \mathbb{N}$ $\quad g_n := \sum_{m=1}^{n} e_{C_m}(\mathbb{E}_{\pi^m_n}(e^*_{C_m}(G)))$.

Dann ist $g_n \in B(L^e_\infty(\mu,X'))$ (denn $\|e^*_{C_m}\| \leq 1$, $\|e_{C_m}\| \leq 1$ und $\|\mathbb{E}_{\pi^m_n}\| \leq 1$ (vgl. (1.3.5.4.))) .

Für $n_0, n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ und jedes $f \in L_1(\mu,X)$ gilt dann :

$$|\langle f,G\rangle - \langle f,g_n\rangle| \leq \|f - \sum_{m=1}^{n_0} f\chi_{C_m}\| + |\langle \sum_{m=1}^{n_0} f\chi_{C_m}, G - g_n\rangle| \xrightarrow[n_0,n\to\infty]{} 0$$

nach (1) und (2).

Teil a) ist gezeigt.

b) I) Wir betrachten hier zunächst den Fall, daß (S,Σ,μ) ein separabler, σ-finiter Maßraum und X separabel ist. Man wähle ein $\nu \in M(L_1(\mu,X),\sigma')$. Berücksichtigt man (1.3.6.4.), so ist $(L_1(\mu,X),\|\cdot\|_1)$ ein separabler Banachraum, also ein Suslin-Raum (vgl. [44, S.96, Def. 3]).

Die Abbildung $id : (L_1(\mu,X),\sigma') \to (L_1(\mu,X),\|\cdot\|)$ ist ν-skalar meßbar, denn :

$$Ba(L_1(\mu,X), \sigma(L_1(\mu,X), L_1(\mu,X)'))$$

$$\underset{n.\,a)}{=} Ba(L_1(\mu,X),\sigma') \subset Bo(L_1(\mu,X),\sigma').$$

Aus [44, S.163, Th. 4] folgt, daß id ν-Lusin meßbar ist.

II) Es sei (S,Σ,μ) nur als σ-finit vorausgesetzt, und X sei ein beliebiger Banachraum. Erneut wähle man $\nu \in M(L_1(\mu,X),\sigma')$. Weiter sei $K \subset L_1(\mu,X)$ als σ'-kompakt vorgegeben. Damit ist $\nu_{|K \cap Bo(L_1(\mu,X),\sigma')}$ erneut ein reguläres, endliches Borelmaß. Nach Satz (2.1.6.) wissen wir, daß K als σ'-kompakte Teilmenge ein Eberlein Kompaktum ist. Nach einem Ergebnis von J. Lindenstrauß [39, S.256] ist der Träger eines regulären, endlichen Borelmaßes

auf einem Eberlein-Kompaktum separabel. Deshalb gibt es eine σ'-separable und σ'-kompakte Teilmenge $K_0 \subset K$ mit

(1) $\nu(K) = \nu(K_0)$.

Nach (1.3.6.3.) existieren ein separabler Teilraum $X_0 \subset X$ und eine separable Teil-σ-Algebra $\Sigma_0 \subset \Sigma$, so daß $(S,\Sigma_0,\mu_{|\Sigma_0})$ σ-finit ist und $K_0 \subset L_1(S,\Sigma_0,\mu,X_0)$. Da $L_1(S,\Sigma_0,\mu,X\ ) \subset L_1(\mu,X)$ nach (1.3.6.1.) bzw. (1.3.6.2.) σ'-abgeschlossen ist, bildet auch

$\nu_{|Bo(L_1(S,\Sigma_0,\mu,X_0),\sigma')}$ ein reguläres endliches Borelmaß.

Wir können I) anwenden und sehen, daß

$\widetilde{id} : (L_1(S,\Sigma_0,\mu,X_0),\sigma') \to (L_1(S,\Sigma_0,\mu,X_0),\|\cdot\|_1)$

$\nu_{|Bo(L_1(S,\Sigma_0,\mu,X_0),\sigma')}$-Lusin-meßbar ist. Falls man nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgibt, so existiert nach Definition (3.1.) eine σ'-kompakte Teilmenge $\tilde{K}_0 \subset K_0$ mit $\nu(K \setminus \tilde{K}_0) \underset{(1)}{=} \nu(K_0 \setminus \tilde{K}_0) < \varepsilon$ und

$\widetilde{id}_{|\tilde{K}_0} = id_{|\tilde{K}_0}$ ist stetig. Damit ist id ν-Lusin-meßbar, also universell meßbar.

III) (S,Σ,μ) sei ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.). Wir wählen $\nu \in M(L_1(\mu,X),\sigma')$ und $K \subset L_1(\mu,X)$ σ'-kompakt.

(2) Nach Lemma (2.1.8) gibt es ein $S_1 \in \Sigma$, so daß $(S_1,\Sigma \cap S_1,\mu)$ σ-finit ist und $f = f\,\chi_{S_1}$ für alle $f \in K$.

Da R_{S_1} σ'-σ'_{S_1}-stetig ist, bildet das Bildmaß $\nu_{S_1} := \nu \circ R_{S_1}$ erneut ein reguläres Borelmaß auf $(L_1(\mu_{|S_1},X),\sigma'_{S_1})$. Ist nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es nach II), da $R_{S_1}(K)$ σ'_{S_1}-kompakt ist, eine σ'_{S_1}-kompakte Teilmenge $\tilde{K} \subset R_{S_1}(K)$ derart, daß

(3) $\nu_{S_1}(R_{S_1}(K) \setminus \tilde{K}) = \nu(R_{S_1}^{-1}(R_{S_1}(K) \setminus \tilde{K})) < \varepsilon$ und $\widetilde{id}_{|\tilde{K}}$ ist σ'_{S_1}-$\|\cdot\|_1$-stetig, wobei

$\widetilde{id} : (L_1(\mu_{|S_1},X),\sigma'_{S_1}) \to (L_1(\mu_{|S_1},X),\|\cdot\|_1)$ sei.

Weiter haben wir nach (2):

(4) $\mathrm{id}_{|K} = e_{S_1} \circ \widetilde{\mathrm{id}} \circ R_{S_1|K}$.

$K_0 := K \cap R_{S_1}^{-1}(\tilde{K}) \subset K$ ist σ'-kompakt und mit (4) ist

$\mathrm{id}_{|K_0} = e_{S_1} \circ \widetilde{\mathrm{id}} \circ R_{S_1|K_0}$. R_{S_1} ist σ'-σ'_{S_1}-stetig und e_{S_1} ist ein beschränkter, linearer Operator. Da $R_{S_1}(K_0) \subset \tilde{K}$ ist, ergibt sich mit (3), daß $\mathrm{id}_{|K_0}$ stetig ist.

Nun ist $K \setminus K_0 = K \setminus R_{S_1}^{-1}(\tilde{K}) \subset R_{S_1}^{-1}(R_{S_1}(K) \setminus \tilde{K})$ und

$K \setminus K_0 = K \setminus R_{S_1}^{-1}(\tilde{K}) \in \mathrm{Bo}(L_1(\mu,X),\sigma')$, da R_{S_1} σ'-σ'_{S_1}-stetig ist.

Wir erhalten dann mit (3): $\nu(K \setminus K_0) \leq \nu_{S_1}(R_{S_1}(K) \setminus \tilde{K}) < \varepsilon$.

Damit ist id ν-Lusin-meßbar und der Beweis des Lemmas ist beendet. □

Aus diesem Lemma läßt sich sofort die Fortsetzbarkeit endlicher, regulärer Borelmaße $M(L_1(\mu,X),\sigma')$ ableiten.

<u>(3.4.) Satz:</u> Es sei (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.), dann gilt: Ist $A \subset L_1(\mu,X)$, $A \neq \emptyset$, so läßt sich jedes $\nu \in M(A,\sigma' \cap A)$ eindeutig zu einem $\tilde{\nu} \in M(A,\|\cdot\|_1)$ fortsetzen. Insbesondere findet man zu jedem regulären, endlichen Borelmaß $\nu \in M(L_1(\mu,X),\sigma')$ eine eindeutige Fortsetzung $\tilde{\nu} \in M(L_1(\mu,X),\|\cdot\|_1)$.

<u>Beweis:</u> Wir zeigen zuerst, daß die Abbildung $\mathrm{id} : (A,\sigma' \cap A) \to (A,\|\cdot\|)$ für $A \subset L_1(\mu,X)$, $A \neq \emptyset$, universell meßbar ist. Dazu seien $\nu \in M(A,\sigma' \cap A)$, $\varepsilon > 0$ und $K \subset A$ σ'-kompakt gegeben. Nach [26, S.25, Th. 1] ist $\mathrm{Bo}(A,\sigma' \cap A) = \mathrm{Bo}(L_1(\mu,X),\sigma') \cap A$. Deshalb ist $\tilde{\nu}(B) := \nu(A \cap B)$ für $B \in \mathrm{Bo}(L_1(\mu,X),\sigma')$ ein reguläres Borelmaß auf $\mathrm{Bo}(L_1(\mu,X),\sigma')$, das ν

fortsetzt. Nach Lemma (3.3.) gibt es eine σ'-kompakte Teilmenge $K_0 \subset K$ mit $\tilde{\nu}(K \setminus K_0) = \nu(K \setminus K_0) < \varepsilon$ und $id_{|K_0}$ ist stetig. Damit ist $id : (A,\sigma' \cap A) \to (A,\|\cdot\|_1)$ universell meßbar. Weiter sei zu $\nu \in M(A,\sigma' \cap A)$ und $n \in \mathbb{N}$ nach Definition eines endlichen regulären Borelmaßes $K_n \subset A$ σ'-kompakt mit $\nu(A \setminus K_n) < \frac{1}{n}$. Nach der obigen Überlegung gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ eine σ'-kompakte Teilmenge $\tilde{K}_n \subset K_n$ mit $\nu(K_n \setminus \tilde{K}_n) < \frac{1}{n}$ und $id|_{\tilde{K}_n}$ ist stetig. Definiert man $K := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{K}_n$, so gilt $\nu(A \setminus K) = 0$. Andererseits hat man: (1) $Bo(K,\sigma' \cap K) = Bo(K,\|\cdot\|)$.

<u>Denn:</u> Ist $C \in Bo(K,\|\cdot\|_1)$, so haben wir $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{K}_n \cap C$. Dabei ist für $n \in \mathbb{N}$ $\tilde{K}_n \cap C \in Bo(\tilde{K}_n,\|\cdot\|_1)$ (vgl. [26, S.25, Th. E]). Aufgrund der Stetigkeit von $id_{|\tilde{K}_n}$ hat man $\tilde{K}_n \cap C \in Bo(\tilde{K}_n,\sigma' \cap \tilde{K}_n)$, also $\tilde{K}_n \cap C \in Bo(K,K \cap \sigma')$ (denn $Bo(\tilde{K}_n,\sigma' \cap \tilde{K}_n) = Bo(K,\sigma' \cap K) \cap \tilde{K}_n \subset Bo(K,\sigma' \cap K)$, da $\tilde{K}_n \subset K$ σ'-kompakt ist). Insgesamt folgt somit $C \in Bo(K,\sigma' \cap K)$ und $Bo(K,\sigma' \cap K) = Bo(K,\|\cdot\|_1)$.

Mit (1) und [26, S.25, Th.E] haben wir dann:

$$Bo(A,\|\cdot\|_1) \cap K = Bo(K,\|\cdot\|) = Bo(K,\sigma' \cap K) =$$
$$= Bo(A,\sigma' \cap A) \cap K \subset Bo(A,\sigma' \cap A), \text{ denn } K \subset Bo(A,\sigma' \cap A).$$

Somit können wir $\tilde{\nu} : Bo(A,\|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{\nu}(C) = \nu(C \cap K)$ definieren. Dann ist $\tilde{\nu}$ ein endliches Maß auf $Bo(A,\|\cdot\|_1)$, das auch regulär ist,

<u>denn:</u> Sind $\varepsilon > 0$ und $C \in Bo(A,\|\cdot\|_1)$ gegeben, so gibt es eine σ'-kompakte Teilmenge $K_0 \subset C \cap K$ mit $\nu(C \cap K \setminus K_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Andererseits findet man, da $id_{|A}$ universell meßbar ist, eine σ'-kompakte Teilmenge $\tilde{K}_0 \subset K_0$ mit $\nu(K_0 \setminus \tilde{K}_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $id_{|\tilde{K}_0}$ ist $\sigma' \cap \tilde{K}_0$-$\|\cdot\|_1$-stetig. Damit ist $\tilde{K}_0$ $\|\cdot\|$-kompakt und $\tilde{\nu}(C \setminus \tilde{K}_0) < \varepsilon$.

$\tilde{\nu}$ setzt ν fort, denn für $C \in Bo(A,\sigma' \cap A)$ hat man

$\nu(C) = \nu(C \setminus K) + \nu(C \cap K) = \nu(C \cap K) = \tilde{\nu}(C)$.

Die Eindeutigkeit erhält man aus [54, S.44, Lemma 2.9.]. □

(3.5.) Korollar: Ist (S,Σ,μ) ein Maßraum gemäß (1.3.3.5.), so läßt sich jedes $\nu \in M(L_1(\mu,X),\sigma')$ eindeutig zu einem endlichen, regulären Borelmaß $\tilde{\tilde{\nu}} \in M(L_1(\mu,X),\tau)$ fortsetzen.

Beweis: Zu $\nu \in M(L_1(\mu,X),\sigma')$ wählen wir die nach Satz (3.4.) existierende Fortsetzung $\tilde{\nu} \in M(L_1(\mu,X),\|\cdot\|_1)$. Dann stellt $\tilde{\tilde{\nu}} := \tilde{\nu}|_{Bo(L_1(\mu,X),\tau)}$ erneut ein positives endliches Borelmaß auf $Bo(L_1(\mu,X),\tau)$ dar. Da jede $\|\cdot\|_1$-kompakte Teilmenge auch τ-kompakt ist, haben wir auch die Regularität von $\tilde{\tilde{\nu}}$. Die Eindeutigkeit ergibt sich erneut mit [54, S.44, Lemma 2.9.]. □

(3.6.) Bemerkung: a) In der Bemerkung (3.2. b)) haben wir erwähnt, daß für einen lokalkonvexen metrisierbaren Raum $(T,\mathcal{T})$ mit topologischen Dual T' jedes endliche reguläre Borelmaß $\nu \in M(T,\sigma(T,T'))$ zu einem endlichen, regulären Borelmaß $\tilde{\nu} \in M(T,\mathcal{T})$ fortsetzbar ist. Wir haben in Satz (3.4.) in doppelter Hinsicht eine Verschärfung. Wenn man voraussetzt, daß X' nicht die RNP besitzt, so ist die σ'-Topologie echt gröber als die schwache Topologie auf $L_1(\mu,X)$. Somit besagt (3.4.), daß man im Fall $L_1(\mu,X)$ die Fortsetzbarkeit von regulären endlichen Borelmaßen auch für die nicht mit der Normtopologie kompatible σ'-Topologie gilt. Dazu beachte man, daß auch (3.2. b) II)) nicht anwendbar ist, wenn (S,Σ,μ) oder X nicht separabel sind. Andererseits zeigt auch Korollar (3.5.), daß man jedes reguläre, endliche Borelmaß $\nu \in M(L_1(\mu,X),\sigma')$ zu einem endlichen regulären Borelmaß $\tilde{\nu} \in M(L_1(\mu,X),\tau)$ fortsetzen kann. Auch hier ist der Satz von Phillips,

Dunford-Pettis und Grothendieck vgl. (3.2. b) II)) nicht anwendbar, da $(L_1(\mu,X),\tau)$ nach (2.2.10.) nur dann metrisierbar ist, wenn X' die RNP besitzt.

b) Aus Lemma (3.3.b)) und einem Ergebnis von W. Graves [25, S.48, Cor.2.3.] erhält man sofort eine Orlicz - Pettis Aussage für einen positiven Maßraum gemäß (1.3.3.5.) :

Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L_1(\mu,X)$ und konvergiert für jede echt aufsteigende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ $\sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}$ in $(L_1(\mu,X),\sigma')$, so konvergiert bereits für jede echt aufsteigende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}$ in $(L_1(\mu,X),\|\cdot\|_I)$.

Wir wollen nun aus Satz (3.4.) ein erstes geometrisches Ergebnis für $L_1(\mu,X)$ herleiten. Dazu führen wir den Begriff der maßkonvexen Mengen ein.

<u>(3.7.) Definition:</u> Es seien $(T,\mathcal{T})$ ein separierter lokalkonvexer Raum und $A \subset T$ konvex und beschränkt. A heißt "maßkonvex", falls für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\nu \in M(A,\mathcal{T} \cap A)$ ein $f_0(\nu) \in A$ existiert, so daß

$$f_0(\nu) = \text{Pettis} - \int_A f \, d\nu(f) \, .$$

Man nennt $f_0(\nu)$ den "Schwerpunkt von ν in A" (vgl. [54, S.15, Def. 1.3.] bzw. [54, S.15, Prop. 1.2.]).

<u>(3.8.) Bemerkung:</u>

a) Der Begriff "maßkonvex" ist eine Abschwächung des Begriffes "vollständig", denn es gilt allgemein: Eine konvexe, beschränkte und vollständige Teilmenge eines separierten lokalkonvexen Raumes ist maßkonvex (vgl. [54, S.18, Remark 2]).

b) Wir haben uns bei der Einführung des Begriffes "maßkonvex" auf die Ha-

bilitationsschrift von G. Winkler [54] bezogen. Allerdings ist der Gebrauch dieses Begriffes in der Literatur nicht einheitlich. So nennen D.H. Fremlin - J.D. Pryce [22] diese Mengen "Krein-Mengen" und G. Edgar [19] nennt sie "t-konvex".

c) Eine ausschließlich topologische Charakterisierung maßkonvexer Mengen ist die folgende:

Ist A eine beschränkte und konvexe Teilmenge eines separierten lokalkonvexen Raumes $(T,\mathcal{T})$, so ist A genau dann maßkonvex, falls für alle $\mathcal{T}$-kompakten Teilmengen $K \subset A$ gilt: $\overline{co}^{\mathcal{T}} K \subset A$ und $\overline{co}^{\mathcal{T}} K$ ist $\mathcal{T}$-kompakt (vgl. [54, S. 16, Prop. 1.4.]).

Im nächsten Lemma wollen wir zeigen, daß σ'-maßkonvexe und $\|\cdot\|_1$-maßkonvexe Mengen identisch sind.

<u>(3.9.) Lemma:</u> Für einen Maßraum (S,Σ,μ) gemäß (1.3.3.5.) und eine beschränkte und konvexe Teilmenge $A \subset L_1(\mu,X)$ gilt: A ist genau dann in $(L_1(\mu,X),\sigma')$ maßkonvex, wenn A in $(L_1(\mu,X),\|\cdot\|_1)$ maßkonvex ist.

<u>Beweis:</u> <u>"$\Rightarrow$":</u> Wir benutzen das Kriterium in Bemerkung (3.8.) b). Für jede $\|\cdot\|_1$-kompakte Teilmenge $K \subset A$ gilt: $\overline{co}^{\|\cdot\|_1} K \subset \overline{co}^{\sigma'} K \subset A$, da A maßkonvex in $(L_1(\mu,X)\sigma')$ ist. Nach dem Theorem von Mazur [16, S.416, V. 2.6.] ist $\overline{co}^{\|\cdot\|_1} K$ $\|\cdot\|_1$-kompakt. Mit Bemerkung (3.8.) c) ist A damit maßkonvex in $(L_1(\mu,X),\|\cdot\|_1)$.

<u>"$\Leftarrow$":</u> Es sei $\nu \in M(A,\sigma' \cap A)$. Dann läßt sich nach Satz (3.4.) eindeutig eine Fortsetzung $\tilde{\nu} \in M(A,\|\cdot\|_1)$ finden. A ist nach Voraussetzung maßkonvex in $(L_1(\mu,X),\|\cdot\|_1)$, d.h. es gibt zu $\tilde{\nu} \in M(A,\|\cdot\|_1)$ ein $f_0(\tilde{\nu}) \in A$ mit

$$f_0(\tilde{\nu}) = \text{Pettis} - \int_A f \, d\tilde{\nu}(f).$$

Dies bedeutet $\langle f_0(\nu), G\rangle = \int_A \langle f, G\rangle \, d\tilde{\nu}(f)$ für alle $G \in L_1(\mu,X)'$.

Da jedes $g \in L_\infty(\mu,X')$ die $Bo(A,\sigma' \cap A)$-$\mathcal{L}(\mathbb{K})$-meßbare Abbildung

$g_A : A \to \mathbb{K}$

$f \mapsto \langle f, g\rangle$ induziert, bedeutet dies insbesondere

$\langle f_0(\nu), g\rangle = \int_A \langle f,g\rangle \, d\nu(f)$ für $g \in L_\infty(\mu,X')$.

Damit ist A auch maßkonvex in $(L_1(\mu,X),\sigma')$. □

Wir geben nun einige Beispiele in $L_1(\mu,X)$ zu dem Begriff "maßkonvex" an.

(3.10.) Beispiele:

a) Nach [22, S.516, Th. 4B] ist jede konvexe offene Menge in einem separierten lokalkonvexen Raum maßkonvex. Damit ist mit Lemma (3.9.) jede konvexe, $\|\cdot\|$-offene Teilmenge maßkonvex in $(L_1(\mu,X),\sigma')$.

b) Aus Bemerkung (3.8.) und Lemma (3.9.) folgt, daß jede $\|\cdot\|_1$-abgeschlossene, beschränkte und konvexe Teilmenge maßkonvex in $(L_1(\mu,X),\sigma')$ ist.

c) Ist $(S,\Sigma,\mu) := ([0,1], \mathcal{L} \cap [0,1], \lambda)$, dann ist $B(L_1(\mu))$ maßkonvex, aber nicht gleichgradig integrierbar.

d) Es sei $(S,\Sigma,\mu) := ([0,1], \mathcal{L} \cap [0,1], \lambda)$ und $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(L_1(\mu))$ die Folge der Rademacher Funktionen. Setzt man $K := \{r_n ; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, so ist K schwach kompakt. Weiter haben wir

$f := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} r_n \in \overline{co}\, K$, aber, da die Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig ist, gilt $f \notin co\, K$.

Da K schwach kompakt ist, ist $co\, K$ gleichgradig integrierbar, aber mit Bemerkung (3.8.) c) nicht maßkonvex.

e) Jede σ'-kompakte und konvexe Teilmenge $K \subset L_1(\mu,X)$ ist maßkonvex. Dies folgt erneut sofort aus Bemerkung (3.8. c)).

Der nachfolgende Satz gibt eine interessante Anwendung von Lemma (3.9.). In [5, S.245, Prop. 1] wurde für einen endlichen positiven Maßraum gezeigt, daß die σ' und die $\|\cdot\|_1$-abgeschlossene konvexe (bzw. absolut-konvexe) Hülle einer σ'-kompakten Teilmenge gleich sind. Dort ging in einem Teil wesentlich der Choquet'sche Darstellungssatz ein. Wir wählen nun einen dazu dualen Zugang über den Begriff der maßkonvexen Mengen.

<u>(3.11.) Satz:</u> Es sei (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.). Dann gilt für eine σ'-kompakte Teilmenge $K \subset L_1(\mu,X)$:

$$\overline{\mathrm{co}}^{\sigma'} K = \overline{\mathrm{co}}^{\|\cdot\|_1} K \quad \text{bzw.} \quad \overline{\mathrm{aco}}^{\sigma'} K = \overline{\mathrm{aco}}^{\|\cdot\|_1} K.$$

<u>Beweis:</u> Nach Lemma (3.9.) (bzw. Beispiel (3.10.) b)) ist $\overline{\mathrm{co}}^{\|\cdot\|_1} K$ als abgeschlossene, beschränkte und konvexe Menge maßkonvex in $(L_1(\mu,X),\sigma')$. Mit Bemerkung (3.8. c)) bedeutet dies, daß $\overline{\mathrm{co}}^{\sigma'} K \subset \overline{\mathrm{co}}^{\|\cdot\|_1} K$ und somit

(1) $\overline{\mathrm{co}}^{\sigma'} K = \overline{\mathrm{co}}^{\|\cdot\|_1} K.$

Wir definieren $C := \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1\}$.

Damit ist $C \cdot K := \{z \cdot f ; z \in C , f \in K\}$ in $L_1(\mu,X)$ σ'-kompakt.

$\mathrm{co}(C \cdot K)$ ist kreisförmig, denn sind $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $x_1,\ldots,x_n \in C \cdot K$ und $r \in C$, so hat man

$$r\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r x_i \in \mathrm{co}(C \cdot K), \quad \text{denn } r x_i \in C \cdot K \quad (i = 1,\ldots,n),$$

da $C \cdot K$ kreisförmig ist. Damit ist $\mathrm{co}(C \cdot K)$ absolut konvex und $\mathrm{co}(C \cdot K) = \mathrm{aco}\, K$.

Insgesamt ergibt sich:

$$\overline{\mathrm{aco}}^{\|\cdot\|_1} K \subset \overline{\mathrm{aco}}^{\sigma'} K = \overline{\mathrm{co}}^{\sigma'} (C \cdot K)$$
$$\underset{(1)}{=} \overline{\mathrm{co}}^{\|\cdot\|_1} (C \cdot K) \subset \overline{\mathrm{aco}}^{\|\cdot\|} (K) \qquad \square$$

Wir kommen nun zu einer weiteren geometrischen Betrachtung von $L_1(\mu,X)$ mit Hilfe der σ'-Topologie. Dabei werden wir die Klasse der abgeschlossenen, beschränkten und konvexen Menge, die die RNP besitzen, erweitern. Es soll hier insbesondere untersucht werden, wann zu einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathbf{A},\mathbb{P})$ ein $\mathbb{P}$-stetiges Vektormaß $m : \mathbf{A} \longrightarrow L_1(\mu,X)$ von beschränkter Variation eine Bochnerdichte besitzt. Hierbei werden wir mit Hilfe der Klasse von Operatoren $\Lambda_0(c_0)$ und $\Lambda_1(c_0)$, die wir in (2.1.) eingeführt haben, eine notwendige und hinreichende Bedingung geben.

Falls X die RNP besitzt, können wir ein weiteres Ergebnis hieraus erschließen: Jede abgeschlossene, beschränkte, konvexe und gleichgradig integrierbare Teilmenge von $L_1(\mu,X)$ besitzt die RNP. Dabei beachte man, daß für einen nicht rein atomaren Maßraum (S,Σ,μ) $L_1(\mu,X)$ natürlich nicht die RNP besitzt (vgl. [7, S.15, Ex. 2.1.2.]), und sich daher das oben angegebene Ergebnis nicht automatisch ergibt.

Es sei schließlich noch darauf hingewiesen, daß A. Costé (vgl. [11]) diesen Fragenkreis ebenfalls behandelt. Er gibt in [11] ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz einer Bochnerdichte mit Hilfe des projektiven Tensorproduktes $c_0 \hat{\otimes} L_1(\mu,X)$.

Für die nachfolgenden Betrachtungen benötigen wir noch einige Bezeichnungen und Definitionen.

<u>(3.12.) Bezeichnung:</u> Es seien $(\Omega,\mathbf{A},\mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Y ein Banachraum und $m : \mathbf{A} \to Y$ ein $\mathbb{P}$-stetiges Vektormaß. Dann heißt $Ar(m) := \left\{\frac{m(A)}{\mathbb{P}(A)} \; ; \; A \in \mathbf{A} \; , \; \mathbb{P}(A) > 0\right\}$ der $\mathbb{P}$-durchschnittliche Wertebereich.

(3.13.) Definition:

a) Es sei Y ein Banachraum. Wir sagen, eine abgeschlossene, beschränkte und konvexe Teilmenge $K \subset Y$ besitzt die RNP, falls für alle Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$ und für jedes $\mathbb{P}$-stetige Vektormaß $m : \mathbb{A} \to Y$ von beschränkter Variation mit $Ar(m) \subset K$ gilt:
Es gibt ein $f \in L_1(\mathbb{P}, Y)$, so daß für alle $A \in \mathbb{A}$ $m(A) = \int_A f \, d\mathbb{P}$
(vgl. [7, S.15, Def. 2.1.1.]).

b) Es seien Y ein reeller Banachraum, $Z \subset Y'$ ein auf Y totaler Teilraum und $K \subset Y$ eine abgeschlossene, beschränkte und konvexe Teilmenge. Wir sagen, $y \in K$ ist ein $\sigma(Y,Z)$-stark exponierter Punkt von K, wenn gilt: Es gibt ein $z \in Z$ mit:

i) $\langle \tilde{y}, z \rangle < \langle y, z \rangle$ für alle $\tilde{y} \in K, \tilde{y} \neq y$.

ii) Für alle Folgen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ mit $\langle y_n, z \rangle \xrightarrow[n \to \infty]{} \langle y, z \rangle$ gilt $\|y_n - y\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Wir bezeichnen mit $\sigma(Y,Z)$ - str exp(K) die Menge der $\sigma(Y,Z)$-stark exponierten Punkte von K.

(3.14.) Bemerkung:

a) Ist Y, Z und K wie in der Definition (3.13.) b), so gilt für $C :=$ $\sigma(Y,Z)$ - str exp(K) id : $(C, \sigma(Y,Z) \cap C) \to (C, \|\cdot\|)$ ist stetig.
Dies sieht man folgendermaßen leicht ein:
Ist $(y_\alpha)_{\alpha \in I} \subset C$ ein gegen $y \in C$ in der $\sigma(Y,Z) \cap C$-Topologie konvergentes Netz, dann gilt $\|y_\alpha - y\| \xrightarrow[\alpha \in I]{} 0$, denn sonst gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für alle $\alpha_0 \in I$ ein $\alpha \geq \alpha_0$ existiert mit $\|y_\alpha - y\| \geq \varepsilon$. Da $y \in C$, findet man ein $z \in Z$, so daß für alle $\tilde{y} \in C$, $\tilde{y} \neq y$ $\langle \tilde{y}, z \rangle < \langle y, z \rangle$. Daher erhält man nach Voraussetzung für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $\alpha_n \in I$ mit

(I) $|\langle y_{\alpha_n}, z\rangle - \langle y,z\rangle| < \frac{1}{n}$

(II) $\|y_{\alpha_n} - y\| \geqq \varepsilon$

Andererseits gilt aber nach Definition der $\sigma(Y,Z)$-stark exponierten Punkte $\|y_{\alpha_n} - y\| \to 0$, und der Widerspruch ist hergestellt.

b) Ist $Z = Y'$, so nennt man jeden $\sigma(Y,Y')$-stark exponierten Punkt einfach stark exponierten Punkt und bezeichnet die Menge aller stark exponierten Punkte einer abgeschlossenen, beschränkten und konvexen $K \subset Y$ $\operatorname{str\,exp}(K)$ (vgl. [7, S.40, Def. 3.2.1.]).

c) Den Zusammenhang zwischen der Radon-Nikodym-Eigenschaft und den stark exponierten Punkten haben R.R. Phelps und J. Bourgain aufgezeigt. Es gilt für einen reellen Banachraum Y und eine abgeschlossene, beschränkte und konvexe Teilmenge $K \subset Y$ (vgl. [7, S.58, Vor. 3.5.7.]):
K besitzt genau dann die RNP, wenn jede nichtleere abgeschlossene und konvexe Teilmenge $C \subset K$ die abgeschlossene, konvexe Hülle ihrer stark exponierten Punkte ist.

S. Troyanski zeigte in [51], daß jede konvexe und schwach kompakte Teilmenge die RNP besitzt. Wir wollen dieses Ergebnis nun auf konvexe σ'-kompakte Teilmengen von $L_1(\mu,X)$ übertragen. Dabei wird das Lemma (3.3.) und ein Ergebnis von E. Saab [41] benötigt.

<u>(3.15.) Satz:</u> Es sei (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.). Dann gilt für eine konvexe, σ'-kompakte Teilmenge $K \subset L_1(\mu,X)$:

a) K besitzt die RNP.

b) Ist zusätzlich $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, so haben wir

i) $K = \overline{\operatorname{co}}^{\sigma'}(\sigma'\text{-}\operatorname{str\,exp}(K))$

ii) Für $C := \sigma'\text{-}\operatorname{str\,exp}(K)$ ist $\operatorname{id} : (C,\sigma' \cap K) \to (C,\|\cdot\|_1)$ stetig.

iii) Für alle nichtleeren Teilmengen $D \subset K$ und für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine σ' offene Menge $U \subset L_1(\mu,X)$ mit $D \cap U \neq \emptyset$ und $\sup\{\|f-g\|_1 \; ; \; f,g \in U \cap D\} < \varepsilon$.

iv) Für alle abgeschlossenen, nichtleeren Teilmengen $D \subset K$ gibt es ein $f \in D$ derart, daß $id : (D,\sigma' \cap D) \to (D,\|\cdot\|_1)$ in f stetig ist.

<u>Beweis:</u>

a) Nach (1.3.4.2.) ist $L_1(\mu,X)$ normierend für $L_\infty(\mu,X')$. Deshalb ist die Abbildung

$$\kappa : L_1(\mu,X) \to L_\infty(\mu,X')'$$
$$f \mapsto \int_S \langle f(s), \cdot \rangle \, d\mu(s)$$

eine Isometrie aufs Bild, die nach Definition σ'-$\sigma(L_\infty(\mu,X')',L_\infty(\mu,X'))$-stetig ist. Da $K \subset L_1(\mu,X)$ σ'-kompakt ist, bildet $\kappa_{|K}$ einen $\sigma' \cap K$ - $\sigma(L_\infty(\mu,X')',L_\infty(\mu,X')) \cap \kappa(K)$ - Homöomorphismus. Die Abbildung $\widetilde{id} : (\kappa(K), \sigma(L_\infty(\mu,X')', L_\infty(\mu,X')) \cap \kappa(K)) \to (\kappa(K), \|\cdot\|)$ ist universell meßbar, <u>denn:</u>

(1) Nach Lemma (3.3.) wissen wir, daß
$id : (L_1(\mu,X),\sigma') \to (L_1(\mu,X),\|\cdot\|_1)$ universell meßbar ist.

(2) $Bo(K,\sigma' \cap K) = Bo(L_1(\mu,X),\sigma') \cap K$ (vgl. [26, S.25, Th. E]), deshalb läßt sich jedes endliches reguläre Borelmaß
$\nu : Bo(K,\sigma' \cap K) \to \mathbb{R}_+$ zu einem regulären, endlichen Borelmaß
$\tilde{\nu} : Bo(L_1(\mu,X),\sigma') \to \mathbb{R}_+$ mittels der Definition
$\tilde{\nu}(A) := \nu(A \cap K)$ für $A \in Bo(L_1(\mu,X),\sigma')$ fortsetzen.

(3) Aus (1), (2) und der Definition (3.1.) folgt, daß
$id : (K,\sigma' \cap K) \to (K,\|\cdot\|)$ universell meßbar ist.

(4) Es gilt: $\widetilde{id} = \kappa \circ id \circ \kappa^{-1}|_{\kappa(K)}$. Da $\kappa_{|K}$ ein $\sigma' - \sigma(L_\infty(\mu,X')',L_\infty(\mu,X'))$ - Homöomorphismus und κ eine Isometrie ist, hat man die universelle Meßbarkeit von $\widetilde{id}$ mit (1).

Damit sind wir in der Lage [4 , S.84, Th. 9], anzuwenden und sehen, daß

(5) $\kappa(K)$ die RNP besitzt.

Nun ist $L_1(\mu,X) \subset L_\infty(\mu,X')'$ isometrisch, und damit hat auch K die RNP.

b) Dazu betrachten wir erneut $\kappa(K) \subset L_\infty(\mu,X')'$.

i) Nach a) (5) besitzt $\kappa(K)$ die RNP. Aus [7, S.91, Th. 4.2.13] folgt für $\tilde{C} := \sigma(L_\infty(\mu,X')',L_\infty(\mu,X')) - \text{str}\exp(\kappa(K))$:

$$\kappa(K) = \overline{\text{co}(\tilde{C})}^{\sigma(L_\infty(\mu,X')',L_\infty(\mu,X'))}.$$

Da $\kappa_{|K}$ ein $\sigma' \cap K - \sigma(L_\infty(\mu,X')',L_\infty(\mu,X')) \cap \kappa(K)$ - Homöomorphismus ist, hat man, wenn man beachtet, daß $\kappa^{-1}(\tilde{C}) = C$ ist: $K = \overline{\text{co}}^{\sigma'}(C)$.

ii) folgt sofort aus Bemerkung (3.14.).

iii) Hierzu beachte man a) (5), [7, S.91, Th. 4.2.13, "a)$\Longleftrightarrow$h)"] und die Isometrie κ. Für ein $\varepsilon > 0$ und eine nichtleere Teilmenge $\tilde{D} \subset \kappa(K)$ gibt es dann eine $\sigma((L_\infty(\mu,X')',L_\infty(\mu,X'))$ - offene Teilmenge $\tilde{U} \subset L_\infty(\mu,X')'$ mit $\tilde{D} \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ und $\sup\{\|F - G\| \; ; F,G \in \tilde{D} \cap \tilde{U}\} < \varepsilon$. Ist $D \subset K$ und $\tilde{D} := \kappa(D)$, so folgt: $U := \kappa^{-1}(\tilde{U})$ ist σ'-offen und $U \cap D \neq \emptyset$. Die Aussage erhält man nun sofort, da κ eine Isometrie darstellt.

iv) ergibt sich erneut aus a) (5), [7, S.91, Th. 4.2.13, "a)$\Longleftrightarrow$j)"] und der Darstellung $id = \kappa^{-1} \circ \widetilde{id} \circ \kappa$ ($\widetilde{id}$ aus a)). □

(3.16.) Bemerkung):

a) Im allgemeinen ist C aus b) ii) in Satz (3.15.) nicht σ'-kompakt. Denn wählt man eine konvexe, σ'-kompakte, aber nicht $\|\cdot\|_1$-kompakte Teilmenge, und wäre C σ'-kompakt, so ist C nach Satz (3.15.) b) ii) auch $\|\cdot\|_1$-kompakt. Wegen Satz (3.11.) und Satz (3.15.) b) ii) gilt $K = \overline{co}^{\sigma'} C = \overline{co}^{\|\cdot\|_1} C$. Also ist K auch normkompakt nach dem Satz von Mazur [16, S.416, V.2.6.]. Ein Beispiel einer σ'-kompakt, aber nicht $\|\cdot\|_1$-kompakten Teilmenge findet sich in den Beispielen 1, 2 und 3 im Paragraph 5.

b) Ist $(T,\mathcal{T})$ ein separierter topologischer Raum und ist $K \subset T$, so sagt man K ist "fragmentiert", falls es eine Metrik $d : K \times K \to \mathbb{R}$ derart gibt, daß für alle nichtleeren Teilmengen $A \subset K$ und $\varepsilon > 0$ eine K-relativ offene Menge $U = U(A,\varepsilon)$ existiert mit $A \cap U \neq \emptyset$ und $\sup\{d(x,y) \; ; \; x,y \in A \cap U\} < \varepsilon$. Nach [7, S.31, Th. 2.3.6. bzw. S.60, Th. 3.6.1.] ist jede schwach kompakte Menge und somit jedes Eberlein-Kompaktum fragmentiert.
Satz (3.15.) iii) verschärft diese Aussage noch für die σ'-Topologie. Jede σ'-kompakte Teilmenge ist nach Satz (2.1.5.) ein Eberlein-Kompaktum. Nach Korollar (2.1.14.) ist die σ'-abgeschlossene, konvexe Hülle einer σ'-kompakten Teilmenge erneut σ'-kompakt.
Damit besagt Satz (3.15. b) iii)), daß jede σ'-kompakte Teilmenge bereits mit der natürlichen $L_1(\mu,X)$-Norm fragmentiert ist.

Wir wollen nun noch eine Aussage über σ'-halbreflexive, normabgeschlossene Teilräume machen (vgl. zum Begriff "halbreflexiv" [36, S.301]). Im Paragraphen 5 wird ein σ'-halbreflexiver, normabgeschlossener Teilraum konstruiert, der nicht schwach Lindelöf und somit insbesondere nicht reflexiv ist.

Das nachfolgende Korollar zeigt mit Satz (3.15.), daß σ'-halbreflexive Teilräume die RNP besitzen.

(3.17.) Korollar: Ist (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.), und ist $L \subset L_1(\mu,X)$ ein normabgeschlossener σ'-halbreflexiver Teilraum, so gilt:

a) L ist σ'-abgeschlossen.

b) L hat die RNP.

Beweis:

a) Man betrachte die kanonische Isometrie $\kappa : L_1(\mu,X) \to L_\infty(\mu,X)'$. Es gilt dann: $\kappa(L) = \operatorname{span} \kappa(B(L))$, wobei $\kappa(B(L))$ $\sigma(L_\infty(\mu,X')',L_\infty(\mu,X'))$-kompakt ist ($B(L)$ ist σ'-kompakt (vgl. [36, S.301 (1),(2)])). $\kappa(L)$ ist normabgeschlossen in $L_\infty(\mu,X')'$, denn L ist normabgeschlossen und κ ist eine Isometrie aufs Bild.
Benützt man eine Folgerung aus dem Satz von Krein-Smulian [16, S.429, V 5.9], so ist $\kappa(L)$ $\sigma(L_\infty(\mu,X')',L_\infty(\mu,X'))$-abgeschlossen. Die kanonische Isometrie $\kappa : L_1(\mu,X) \to \kappa(L_1(\mu,X))$ ist ein $\sigma' - \sigma(L_\infty(\mu,X')',L_\infty(\mu,X')) \cap \kappa(L_1(\mu,X))$ -Homöomorphismus und a) ist bewiesen.

b) ergibt sich mit Satz (3.15.). □

Wir wollen nun im folgenden die Frage untersuchen, wann zu einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathbb{A},\mathbb{P})$ ein $\mathbb{P}$-stetiges Vektormaß $m : \mathbb{A} \to L_1(\mu,X)$ von beschränkter Variation eine Bochnerdichte $F \in L_1(\mathbb{P},L_1(\mu,X))$ besitzt. Aus Satz (3.15.) ergibt sich die folgende Charakterisierung mit Hilfe des $\mathbb{P}$-durchschnittlichen Wertebereiches.

<u>(3.18.) Lemma:</u> Es seien (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.), X ein reeller Banachraum und $(\Omega,\mathbb{A},\mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gilt: Ein $\mathbb{P}$-stetiges Vektormaß $m : \mathbb{A} \to L_1(\mu,X)$ von beschränkter Variation besitzt genau dann eine Bochnerdichte, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine Menge $\Omega_\varepsilon \in \mathbb{A}$ existiert mit

1) $\mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$,

2) $Ar(m_{|\Omega_\varepsilon})$ ist relativ σ'-kompakt.

<u>Beweis:</u> Die Notwendigkeit der Bedingung folgt nach dem Theorem von Rieffel (vgl. [7, S.23, Th. 2.2.6.]).

Wir zeigen nun, daß die Bedingung auch hinreichend ist. Mit [4, S.416, Cor. 2.5.] und nach Voraussetzung gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge $\Omega_\varepsilon \in \mathbb{A}$ derart, daß $\mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$ und $\overline{co}^{\sigma'}(Ar(m_{|\Omega_\varepsilon}))$ σ'-kompakt ist.

Aus Satz (3.15. a)) folgt, daß $\overline{co}^{\sigma'}(Ar(m_{|\Omega_\varepsilon}))$ die RNP besitzt. Berücksichtigt man [7, S.31, Th. 2.3.6., "1) $\Longleftrightarrow$ 6)"] und das Theorem von Rieffel [7, S.23, Th. 2.2.6., "1) $\Longleftrightarrow$ 4)"], so besitzt m eine Bochnerdichte $F \in L_1(\mathbb{P},L_1(\mu,X))$. □

Mit diesem Lemma können wir unter Berücksichtigung von Satz (2.1.12.) eine Charakterisierung von differenzierbaren Vektormaßen mit Hilfe einer Klasse von σ'-$\sigma(c_0,\ell_1)$-stetigen Operatoren $T : L_1(\mu,X) \to c_0$ herleiten.

<u>(3.19.) Satz:</u> Für einen positiven Maßraum (S,Σ,μ) gemäß (1.3.3.5.), einen reellen Banachraum X und einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathbb{A},\mathbb{P})$ gilt: Ein $\mathbb{P}$-stetiges Vektormaß $m : \mathbb{A} \to L_1(\mu,X)$ von beschränkter Variation hat eine Bochnerdichte $F \in L_1(\mathbb{P},L_1(\mu,X))$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Menge $\Omega_\varepsilon \in \mathbb{A}$ existiert mit:

i) $\mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$.

ii) Für alle $A \in \Sigma_e$ und für alle $T \in \Lambda_0^A(c_0) \cup \Lambda_1^A(c_0)$ ist $Ar(T \circ m_{|\Omega_\varepsilon})$ relativ schwach kompakt.

iii) Für alle $A \in \Sigma_e$ ist $Ar(I_A \circ m_{|\Omega_\varepsilon})$ relativ schwach kompakt.

<u>Beweis:</u> Wir zeigen zu Beginn, daß die Bedingungen i) - iii) hinreichend sind. Um Lemma (3.18.) anzuwenden, weisen wir zuerst nach, daß man zu $\varepsilon > 0$ eine Menge $\Omega_\varepsilon \in \mathbb{A}$, die i) - iii) genügt, derart findet, daß $Ar(m_{|\Omega_\varepsilon})$ beschränkt ist. Es gibt nach Voraussetzung eine Menge $\Omega_{\varepsilon/2} \in \mathbb{A}$ derart, daß $\mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon/2}) < \frac{\varepsilon}{2}$ und ii), iii) erfüllt sind.

Betrachtet man $m_{\varepsilon/2} := m_{|\Omega_{\varepsilon/2}}$, so ist $m_{\varepsilon/2}$ ebenfalls ein Vektormaß von beschränkter Variation und $\mathbb{P}_{|\mathbb{A} \cap \Omega_{\varepsilon/2}}$-stetig. $|m_{\varepsilon/2}| : \mathbb{A} \cap \Omega_{\varepsilon/2} \to \mathbb{R}$ ist $\mathbb{P}_{|\mathbb{A} \cap \Omega_{\varepsilon/2}}$-stetig, und daher existiert nach dem Satz von Radon-Nikodým ein $f_{\varepsilon/2} \in L_1(\mathbb{P})$ mit $|m_{\varepsilon/2}|(B) = \int_B f_{\varepsilon/2}\, d\mathbb{P}$ für alle $B \in \mathbb{A} \cap \Omega_{\varepsilon/2}$. Setzt man für $n \in \mathbb{N}$ $B_n := \{\omega \in \Omega_{\varepsilon/2} ; n-1 \leq |f_{\varepsilon/2}(\omega)| < n\}$, so gilt: $\mathbb{P}(\Omega_{\varepsilon/2}) = \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$.

Da die Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt ist, haben wir:

Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{P}(\Omega_{\varepsilon/2} \setminus \bigcup_{n=1}^{k} B_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Somit gilt für $\Omega_\varepsilon := \bigcup_{n=1}^{k} B_n$

(1) $\mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) = \mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon/2}) + \mathbb{P}(\Omega_{\varepsilon/2} \setminus \bigcup_{n=1}^{k} B_n) < \varepsilon$.

(2) Für alle $B \in \mathbb{A} \cap \Omega_\varepsilon$ hat man:

$$\|m(B)\| \leq |m|(B) \leq \int_B |f_{\varepsilon/2}(\omega)|\, d\mathbb{P}(\omega) \leq k\, \mathbb{P}(B) \leq k.$$

(3) Für $m_{|\Omega_\varepsilon}$ sind ii) und iii) aus der Voraussetzung erfüllt.

(4) Damit ist $Ar(m_{|\Omega_\varepsilon})$ beschränkt.

I) Ist (S,Σ,μ) ein endlicher, positiver Maßraum, so folgt aus (i) - (iii), (4) und Bemerkung (2.1.16.) a), daß $Ar(m_{|\Omega_\varepsilon})$ relativ σ'-kompakt ist (man beachte, daß für die linearen und beschränkten Operatoren $I_A (A \in \Sigma)$ und $T \in \Lambda_0^S(c_0) \cup \Lambda_1^S(c_0)$ $Ar(I_A \circ m_{|\Omega_\varepsilon}) = I_A(Ar(m_{|\Omega_\varepsilon}))$ und $Ar(T \circ m_{|\Omega_\varepsilon}) = T(Ar(m_{|\Omega_\varepsilon}))$ gilt). Lemma (3.18.) zeigt, daß m eine Dichte besitzt.

II) Falls nun (S,Σ,μ) ein beliebiger positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.) ist, so können wir mit den Aussagen (i) - (iii) und Lemma (3.18.) nicht sofort schließen, daß m eine Dichte hat. Denn man kann nicht Satz (2.1.12.) anwenden, um zu erkennen, daß $Ar(m_{|\Omega_\varepsilon})$ relativ σ'-kompakt ist. Es fehlt hierzu die Bedingung (v) aus Satz (2.1.12.). Wir werden zeigen, daß man diese Bedingung hier nicht benötigt und mit (I) direkt zeigen kann, daß m eine Dichte besitzt. Nach [7, S.31, Th. 2.3.6.] kann man o.E. annehmen, daß $Ar(m)$ separabel ist. Dann existiert nach (1.3.6.3.) ein $A \in \Sigma$ derart, daß $(A, \Sigma \cap A, \mu_{|\Sigma \cap A})$ σ-finit ist, und $R_{S \setminus A} \circ m(E) = 0$ für alle $E \in \mathbb{A}$.

Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_e \cap A$ paarweise disjunkt gewählt mit $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Wegen der Beschränktheit des Operators $R_C (C \in \Sigma_e)$ bildet $R_C \circ m : \mathbb{A} \to L_1(\mu_{|C}, X)$ ein Vektormaß von beschränkter Variation, und $R_C \circ m$ ist $\mathbb{P}$-stetig. Für $C \in \Sigma_e$ erfüllt auch $R_C \circ m$ die Voraussetzung (i) - (iii) des Satzes, so daß wir nach

(I) ein $F_C \in L_1(\mathbb{P}, L_1(\mu_{|C}, X))$ finden mit $R_C \circ m(E) = \int_E F_C \, d\mathbb{P}$.

Nach der Vorüberlegung wissen wir, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{A}$ gibt, so daß $Ar(m_{|\Omega_\varepsilon})$ beschränkt ist, und i) - iii) erfüllt sind. Dann findet man zu $\varepsilon > 0$ ein $K > 0$, so daß für alle $C \in \Sigma_e$ und $\mathbb{P}$-fast alle $\omega \in \Omega_\varepsilon$ $\|F_C(\omega)\| \leq K$ (man beachte $\|R_C\| \leq 1$, $C \in \Sigma_e$). Setzt man für $k \in \mathbb{N}$ $C_k := \bigcup_{n=1}^{k} A_n$, so gilt für $\mathbb{P}$-fast alle $\omega \in \Omega_\varepsilon$:

$$F_{C_k}(\omega) = \sum_{n=1}^{k} e_{A_n} \circ F_{A_n}(\omega) \quad \text{und}$$

$$\|F_{C_k}(\omega)\| = \sum_{n=1}^{k} \|F_{A_n}(\omega)\| \leq K \quad (m \in \mathbb{N})$$

(man beachte, daß die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt ist).

Damit existiert für $\mathbb{P}$-fast alle $\omega \in \Omega_\varepsilon$ $F(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} e_{A_n} F_{A_n}(\omega)$ in $(L_1(\mu, X), \|\cdot\|_1)$, wobei für $\mathbb{P}$-fast alle $\omega \in \Omega_\varepsilon$ $\|F(\omega)\| \leq K$ gilt.

Da $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, folgt nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz:

$$F \in L_1(\mathbb{P}_{|\Omega_\varepsilon}, L_1(\mu, X)) \quad \text{und} \quad \|F - F_{C_k}\|_{L_1(\mathbb{P}_{|\Omega_\varepsilon}, L_1(\mu, X))} \xrightarrow{k \to \infty} 0.$$

Es gilt nun für $E \in \mathcal{A} \cap \Omega_\varepsilon$ $m_{|\Omega_\varepsilon}(E) = \int_E F \, d\mathbb{P}_{|\Omega_\varepsilon}$:

Zu $\delta > 0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geq k_0$

$$\|m(E) - e_{C_k}(R_{C_k} \circ m(E))\| < \delta/2.$$

Weiter gibt es ein $k_1 \geq k_0$ mit $\|F - F_{C_{k_1}}\|_{L_1(\mathbb{P}_{|\Omega_\varepsilon}, L_1(\mu, X))} < \frac{\delta}{2}$.

Wir haben dann:

$$\|m(E) - \int_E F \, d\mathbb{P}_{|\Omega_\varepsilon}\| \leq \|m(E) - e_{C_k}(R_{C_k} \circ m(E))\| +$$

$$+ \|e_{C_k} \circ (R_{C_k} \circ m(E)) - \int_E F_{C_k} \, d\mathbb{P}_{|\Omega_\varepsilon}\| + \|\int_E F_{C_k} - F \, d\mathbb{P}_{|\Omega_\varepsilon}\| <$$

$$< \delta/2 + \delta/2 = \delta.$$

Da $\delta > 0$ beliebig gewählt werden kann, hat $m_{|\Omega_\varepsilon}$ die Dichte $F \in L_1(\mathbb{P}_{|\Omega_\varepsilon}, L_1(\mu,X))$. Wendet man nun den Satz von Rieffel [7, S.23, Th. 2.2.6.] zweimal an (zuerst "a) ⇒ b)" auf $m_{|\Omega_\varepsilon}$ und anschließend "b) ⇒ a)" auf m), so besitzt m eine Dichte. □

Daß die Bedingungen notwendig sind, ergibt sich sofort aus Lemma (3.18.) und Satz (2.1.12.).

(3.20.) Bemerkung: Wenn man die Aussage von Satz (3.19.) im Lichte von Korollar (2.1.13.) betrachtet, so läßt sich sagen, daß die Möglichkeit, ein $\mathbb{P}$-stetiges Vektormaß von beschränkter Variation $m : \mathbb{A} \to L_1(\mu,X)$ durch eine Bochnerdichte $F \in L_1(\mathbb{P}, L_1(\mu,X))$ darzustellen, allein durch σ'-$\sigma(c_0,\ell_1)$-stetige, lineare Operatoren $T : L_1(\mu,X) \to c_0$ zu charakterisieren, dann gegeben ist, wenn die schwache Kompaktheit in X durch beschränkte, lineare Operatoren $S : X \to c_0$ charakterisiert wird.

Im nächsten Satz wird gezeigt, daß man die Bedingung im Satz (3.19.) wesentlich vereinfachen kann, setzt man voraus, daß X die RNP besitzt. Schon in (2.1.16.) hatten wir vermerkt, daß die Bedingung a) iii) in (2.1.12.) für die Charakterisierung relativ σ'-kompakter Mengen überflüssig ist, falls X die RNP besitzt. Daher ist der folgende Satz einleuchtend, dessen Aussage sich nicht sofort aus Satz (3.19.) ergibt. Wir werden den Beweis daher ohne Rückgriff auf Satz (3.19.) führen.

(3.21.) Satz: Ist (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.), X ein reeller Banachraum, der die RNP besitzt, so gilt für einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathbb{A},\mathbb{P})$:

Ein $\mathbb{P}$-stetiges Vektormaß von beschränkter Variation $m : \mathbb{A} \to L_1(\mu,X)$ besitzt genau dann eine Bochnerdichte, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\Omega_\varepsilon \in \mathbb{A}$ existiert, so daß:

i) $\mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$.

ii) $Ar(m_{|\Omega_\varepsilon})$ ist gleichgradig integrierbar.

<u>Beweis:</u> Die Notwendigkeit erhält man aus Lemma (3.18.) und Korollar (2.1.17).

Für die Umkehrung zeigen wir, daß $\overline{co}^{\sigma'}(Ar(m_{|\Omega_\varepsilon}))$ für jedes $\varepsilon > 0$ die RNP besitzt. Daraus folgt mit dem Theorem von Rieffel (vgl. [7, S.237, Th.2.2.6]) die Behauptung. Wir setzen für $\varepsilon > 0$ $B_\varepsilon := \overline{co}^{\sigma'}(Ar(m_{|\Omega_\varepsilon}))$. O.E. kann man annehmen, daß B_ε beschränkt ist, d.h. $\sup_{f \in B_\varepsilon} \|f\|_1 \leq M$. Um dies einzusehen, geht man ähnlich wie im Satz (3.19.) vor. Man wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $\Omega_{\varepsilon/2} \in \mathbb{A}$ derart, daß $\mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon/2}) < \varepsilon/2$ und ii) erfüllt ist. Wie im Satz (3.19.) gibt es ein $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{A} \cap \Omega_{\varepsilon/2}$ mit
$\mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$ und $\|m(C)\|_1 \leq n\,\mathbb{P}(C) \leq n$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ und alle $C \in \mathbb{A} \cap \Omega_\varepsilon$. Natürlich genügt Ω_ε auch ii).
B_ε ist gleichgradig integrierbar. Angenommen es gibt ein $\delta > 0$ und Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_\varepsilon$ bzw. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_e$ mit $\mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ und

(1) $\int_{A_n} \|f_n\|\, d\mu \geq \delta$ für $n \in \mathbb{N}$.

Dann gibt es eine Teilfolge $(A_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mu(A_{n_k}) \leq 2^{-k}$ $(k \in \mathbb{N})$. Setzt man $A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{n_k}$, so gilt $A \in \Sigma_e$. Für $T \in \Lambda_0^A(c_0)$ ist $T(B_\varepsilon)$ relativ schwach kompakt (vgl. [4, S.412, Prop. 2.2], $Ar(m_{|\Omega_\varepsilon})$ ist gleichgradig integrierbar). Wiederum mit [4, S.412, Prop.] ist $R_A(B_\varepsilon)$ gleichgradig integrierbar, was im Widerspruch zu (1) steht. Um zu zeigen, daß B_ε die RNP besitzt, benutzen wir ein Kriterium, das auf S.D. Chatterji zurückgeht (vgl. [7, S.31, Th. 2.3.6. "1) $\Longleftrightarrow$ 5)"]).

Dazu betrachte man ein Martingal $(F_n, D_n, n \in \mathbb{N})$, wobei für alle $n \in \mathbb{N}$ $D_n \subset \mathcal{B} \cap [0,1]$, $F_n : [0,1] \to L_1(\mu, X)$ D_n-meßbar, $\{F_n(t) ; t \in [0,1]\}$ endlich sind, und $F_n(t) \in B_\varepsilon$ λ-f.ü. gilt. Wir nehmen o.E. an : $F_n(t) \in B_\varepsilon$ für alle $t \in [0,1]$, und B_ε ist separabel (vgl. [7, S.31, Th. 2.3.6.]).

I) Wir betrachten zuerst einen endlichen positiven Maßraum (S, Σ, μ). Man wähle eine aufsteigende Folge von endlichen Σ-Partitionen $(\pi_j)_{j \in \mathbb{N}}$, so daß für $\Sigma_0 := \sigma\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \pi_j\right)$ $B_\varepsilon \subset L_1(\mu_{|\Sigma_0}, X)$. Für $j \in \mathbb{N}$ bildet $(\mathbb{E}_{\pi_j} \circ F_n, D_n, n \in \mathbb{N})$ erneut ein Martingal, denn:

a) $\mathbb{E}_{\pi_j} \circ F_n$ ist D_n-meßbar, da $\mathbb{E}_{\pi_j}$ ein beschränkter linearer Operator ist.

b) Es seien $n \geq k$, $n,k \in \mathbb{N}$ und $E \in D_k$, so gilt

$$\int_E \mathbb{E}_{\pi_j} \circ F_n \, d\lambda = \mathbb{E}_{\pi_j} \int_E F_n \, d\lambda = \mathbb{E}_{\pi_j} \int_E F_k \, d\lambda = \int_E \mathbb{E}_{\pi_j} \circ F_k \, d\lambda .$$

Wir hatten vorausgesetzt, daß X die RNP besitzt, und damit hat auch $L_1(\mu_{|\pi_j}, X)$ (vgl. [14, S.62/63]) für $j \in \mathbb{N}$ die RNP. Somit gibt es für alle $j \in \mathbb{N}$ eine $\mathcal{B}$-meßbare Funktion

(2) $\phi_j : [0,1] \to L_1(\mu_{|\pi_j}, X)$ derart, daß $\phi_j(t) \in \overline{\mathbb{E}_{\pi_j}(B_\varepsilon)}$ λ f.ü.

und $\|\phi_j - \mathbb{E}_{\pi_j} \circ F_n\|_{L_1(\lambda, L_1(\mu_{|\pi_j}, X))} \xrightarrow{n \to \infty} 0$ ([7, S.19, Th.2.2.1]).

Erneut kann man o.E. annehmen, daß $\phi_j(t) \in \mathbb{E}_{\pi_j} \overline{(B_\varepsilon)}$ für alle $t \in [0,1]$. $(\phi_j(t), \pi_j, j \in \mathbb{N})$ bildet für λ-f. alle $t \in [0,1]$ ein Martingal, denn nach [7, S.19, Th. 2.2.1] gilt für λ-f. alle $t \in [0,1]$ $\|\phi_j(t) - \mathbb{E}_{\pi_j} F_n(t)\|_1 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ und alle $j \in \mathbb{N}$. Ist nun $k \geq j$, $k,j \in \mathbb{N}$, so hat man für λ-f. alle $t \in [0,1]$

$$\|\mathbb{E}_{\pi_j} \phi_k(t) - \phi_j(t)\|_1 \leq$$

$$\|\mathbb{E}_{\pi_j} \phi_k(t) - \mathbb{E}_{\pi_j} \mathbb{E}_{\pi_k} \circ F_n(t)\|_1 + \|\mathbb{E}_{\pi_j} \circ F_n(t) - \phi_j(t)\|_1 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Mit B_ε ist auch $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_{\pi_j}(B_\varepsilon)$ und damit $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_{\pi_j}(B_\varepsilon)}^{\sigma'}$ gleichgradig integrierbar (man beachte, daß B_ε beschränkt ist, sowie [4, S.412, Prop. 2.2.]). Somit erhalten wir:

Für λ-fast alle $t \in [0,1]$ ist $(\phi_j(t), \pi_j, j \in \mathbb{N})$ ein gleichgradig integrierbares Martingal.

Da X die RNP besitzt, können wir ein bekanntes Martingaltheorem anwenden (vgl. [14, S.126, Cor. 4]) und schließen:

Es gibt ein $\phi : [0,1] \longrightarrow L_1(\mu,X)$ mit

$$\|\phi(t) - \phi_j(t)\|_1 \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \qquad \lambda\text{.-f. überall.}$$

Damit ist aber ϕ $\mathcal{L} \cap [0,1]$-meßbar. Nun gilt: $\phi(t) \in B_\varepsilon$ für λ-f. alle $t \in [0,1]$.

Dazu sei $t \in [0,1]$ mit $\phi_j(t) \in \overline{\mathbb{E}_{\pi_j}(B_\varepsilon)}^{\sigma'}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $\|\phi(t) - \phi_j(t)\|_1 \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$. Dann gilt $\phi(t) \in B_\varepsilon$. Denn angenommen $\phi(t) \notin B_\varepsilon$, so gibt es, da B_ε konvex und σ'-abgeschlossen ist, nach einem Trennungssatz ein $g \in B(L_\infty(\mu,X'))$ und $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle\phi(t), g\rangle \leq \alpha < \beta \leq \inf_{f\in B_\varepsilon} \langle f,g\rangle .$$

Nach [4, S.411] existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $j \geq j_0$:

$$\sup_{f\in B_\varepsilon} |\langle f - \mathbb{E}_{\pi_j} f, g\rangle| < \frac{\beta-\alpha}{3} .$$

Ferner gibt es ein $j_1 \geq j_0 : \|\phi(t) - \phi_{j_1}(t)\|_1 < \frac{\beta-\alpha}{3}$. Insgesamt gilt dann für $j_1 \geq j_0$:

$$\langle\phi_{j_1}(t), g\rangle \leq \frac{\beta+2\alpha}{3} < \frac{2\beta+\alpha}{3} \leq \inf_{f\in B_\varepsilon} \langle \mathbb{E}_{\pi_{j_1}} f, g\rangle$$

Dies steht im Widerspruch zu $\phi_{j_1}(t) \in \overline{\mathbb{E}_{\pi_{j_1}} B_\varepsilon}^{\sigma'}$. Da B_ε beschränkt ist, erhält man aus der punktweisen Konvergenz $\phi_j(t) \xrightarrow[j\to\infty]{} \phi(t)$ λ.-f.ü. und dem Satz von der majorisierten Konvergenz:

(3) $\int_{[0,1]} \|\phi(t) - \phi_j(t)\|_1 \, d\lambda(t) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$

Wir müssen noch zeigen: $F_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi(t)$ λ.-f.ü. Dazu zeigen wir $(\mathbb{E}^{L_1(\mu,X)}_{D_n}\phi)(t) = F_n(t)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ λ.-f.ü. Es sei hierzu $g \in B(L_\infty(\mu,X'))$, $n \in \mathbb{N}$ und $E \in D_n$ vorgegeben. Zu $\delta > 0$ gibt es ein $j_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $j \geq j_0$ und alle $f \in B_\varepsilon$

(4) $|\langle f - \mathbb{E}_{\pi_j} f, g\rangle| < \frac{\delta}{3}$ (vgl. [4, S.411])

und

(5) $\|\int_E \phi \, d\lambda - \int_E \phi_j \, d\lambda\|_1 < \frac{\delta}{3}$ (vgl. (3)) .

Weiter findet man ein $k \geq n$ mit

(6) $\|\mathbb{E}_{\pi_{j_0}} \circ F_k - \phi_{j_0}\|_{L_1(\lambda, L_1(\mu|_{\pi_{j_0}}, X))} < \frac{\delta}{3}$ (vgl. (2)) .

Damit erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&|\langle \int_E \phi(t)\, d\lambda(t) - \int_E F_n(t)\, d\lambda(t), g\rangle| && = \\
&|\langle \int_E \phi(t)\, d\lambda(t) - \int_E F_k(t)\, d\lambda(t), g\rangle| && \leq \\
&|\langle \int_E \phi(t)\, d\lambda(t) - \int_E \phi_{j_0}(t)\, d\lambda(t), g\rangle| && + \\
&|\langle \int_E \phi_{j_0}(t)\, d\lambda(t) - \int_E (\mathbb{E}_{\pi_{j_0}} \circ F_k)(t)\, d\lambda(t), g\rangle| && + \\
&\int_E |\langle F_k(t) - \mathbb{E}_{\pi_{j_0}} F_k(t), g\rangle|\, d\lambda(t) && \underset{\text{nach (5),(6) und (4)}}{<} \\
& && \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3}\lambda(E) < \delta .
\end{aligned}
$$

Da man $\delta > 0$ beliebig und unabhängig von $n \in \mathbb{N}$ wählen kann, erhalten wir

$$\langle \int_E \phi(t)\, d\lambda(t), g\rangle = \langle \int_E F_n(t)\, d\lambda(t), g\rangle$$

für jedes $g \in L_\infty(\mu,X')$.

Damit gilt: $\int_E \phi(t)\, d\lambda(t) = \int_E F_n(t)\, d\lambda(t)$ und insgesamt

$(\mathbb{E}^{L_1(\mu,X)}_{D_n}\phi)(t) = F_n(t)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und λ-f.ü. .

II) Wir gehen nun zu einem nicht notwendig endlichen Maßraum (S,Σ,μ) gemäß (1.3.3.5.) über. Da B_ε separabel ist, gibt es eine Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_e$ paarweise disjunkt mit (vgl. (1.3.6.3.)):

Setzt man $A := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$, so ist $R_{S\setminus A} f = 0$ für alle $f \in B_\varepsilon$.

Mit $m : A \to L_1(\mu,X)$ erfüllt auch $R_C \circ m : A \to L_1(\mu_{|C},X)$ für jedes $C \in \Sigma_e$ die Voraussetzung i) und ii) des Satzes (man beachte, daß $R_C \circ m$ erneut ein $\mathbb{P}$-stetiges Vektormaß von beschränkter Variation ist, denn $\|R_A\| \leq 1$).

$(R_{A_j} \circ F_n, D_n, n \in \mathbb{N})$ bildet natürlich für alle $j \in \mathbb{N}$ ein Martingal mit

$$(R_{A_j} \circ F_n)(t) \in \overline{R_{A_j} B_\varepsilon}^{\sigma'} \quad \lambda\text{.-f.ü.}$$

Damit gibt es für alle $j \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{\phi}_j \in L_1(\lambda,L_1(\mu_{|A_j},X))$ mit

$$\|R_{A_j} \circ F_n - \tilde{\phi}_j\|_{L_1(\lambda,L_1(\mu_{|A_j},X))} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{(vgl. (I))}.$$

Setzt man für $k \in \mathbb{N}$ $C_k := \bigcup_{j=1}^{k} A_j$, so erhält man ebenfalls nach (I):

Es existiert ein $\phi_k \in L_1(\lambda,L_1(\mu_{|C_k},X))$ und

$$\|R_{C_k} \circ F_n - \phi_k\|_{L_1(\lambda,L_1(\mu_{|C_k},X))} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad .$$

Man hat für alle $k \in \mathbb{N}$: $\phi_k(t) = \sum_{j=1}^{k} e_{A_j} \circ \tilde{\phi}_j(t)$ λ.-f.ü..

Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist:

(7) $\|\phi_k(t)\| \leq \sup_{f\in B_\varepsilon} \|R_{C_k}(f)\| \leq M$ für λ-f. alle $t \in [0,1]$.

Nun gilt für $k \in \mathbb{N}$, da die Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt ist, auch λ.-f.ü.:

$$\|\phi_k(t)\|_1 = \sum_{j=1}^{k} \|\tilde{\phi}_j(t)\|_1 \quad .$$

Damit folgt wegen (7):

Für λ.-f. alle $t \in [0,1]$ existiert $\phi(t) := \sum_{j=1}^{\infty} e_{A_j} \tilde{\phi}_j(t)$ in $(L_1(\mu,X), \|\cdot\|_1)$. Wir nehmen o.E. an, $\phi(t)$ existiert für alle $t \in [0,1]$. Da $\|\phi(t)\| \leq M$ für alle $t \in [0,1]$ ist, und $([0,1], \mathcal{L} \cap [0,1], \lambda)$ einen endlichen Maßraum darstellt, hat man mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz:

(8) $\|e_{C_k} \circ \phi_k - \phi\|_{L_1(\lambda, L_1(\mu,X))} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0.$

Wir wollen nun zeigen, daß $\|F_n - \phi\|_{L_1(\lambda, L_1(\mu,X))} \xrightarrow{n \to \infty} 0$ gilt. Dazu zeigen wir wie in (I):

Für alle $n \in \mathbb{N}$ haben wir: $(\mathbb{E}_{D_n}^{L_1(\mu,X)} \phi)(t) = F_n(t)$ für λ.-f. alle $t \in [0,1]$.

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $E \in D_n$ und $g \in B(L_\infty^e(\mu,X'))$ mit $g = g\chi_{\tilde{A}}$ für ein $\tilde{A} \in \Sigma$.

Wir wissen, daß B_ε beschränkt und gleichgradig integrierbar ist.

somit ist $\{ \langle (R_{\tilde{A}} f)(\cdot), (\tilde{R}_{\tilde{A}} g)(\cdot) \rangle ;\ f \in B_\varepsilon \} \subset L_1(\mu)$ ebenfalls beschränkt und gleichgradig integrierbar, also relativ schwach kompakt [16, S.294, IV.8.11.].

Ist nun $\delta > 0$ beliebig vorgegeben, so existiert, da $\int_S \langle f(s), g(s) \rangle \, d\mu(s) = \int_S \langle R_{\tilde{A}} f(s), \tilde{R}_{\tilde{A}} g(s) \rangle \, d\mu(s)$ für $f \in B_\varepsilon$, nach [16, S.292, IV.8.9] ein $k \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $f \in B_\varepsilon$:

(9) $\left| \int_S \langle f(s), g(s) \rangle \, d\mu(s) - \int_S \langle f(s), g(s) \rangle \, \chi_{C_k}(s) \, d\mu(s) \right| < \frac{\delta}{3}$, und

(10) $\|\phi - e_{C_k} \circ \phi_k\|_{L_1(\lambda, L_1(\mu,X))} < \frac{\delta}{3}$ (vgl. (8)).

Ferner findet man ein $n_1 \geq n$ mit

(11) $\|R_{C_k} \circ F_{n_1} - \phi_k\|_{L_1(\lambda, L_1(\mu_{|C_k}, X))} < \frac{\delta}{3}$.

Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
&\left| \langle \int_E \phi(t) \, d\lambda(t) - \int_E F_n(t) \, d\lambda(t), g \rangle \right| && = \\
&\left| \langle \int_E \phi(t) \, d\lambda(t) - \int_E F_{n_1}(t) \, d\lambda(t), g \rangle \right| && \leq \\
&\left| \langle \int_E \phi(t) \, d\lambda(t) - \int_E e_{C_k} \circ \phi_k(t) \, d\lambda(t), g \rangle \right| && + \\
&\left| \langle \int_E \phi_k(t) \, d\lambda(t) - \int_E (R_{C_k} \circ F_{n_1})(t) \, d\lambda(t), \tilde{R}_{C_k} g \rangle \right| && + \\
&\int_E \left| \langle F_{n_1}(t) - F_{n_1}(t) \chi_{C_k}, g \rangle \right| d\lambda(t) && \leq \\
& && \text{nach (9), (10) und (11)}
\end{aligned}
$$

$$\frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3}\lambda(E) < \delta .$$

Da $\delta > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ unabhängig voneinander gewählt wurden, folgt für alle $g \in L^e_\infty(\mu,X')$

$$<\int_E \phi(t)\, d\lambda(t), g> \; = \; <\int_E F_n(t)\, d\lambda(t), g> .$$

Also hat man, da $L^e_\infty(\mu,X')$ total auf $L_1(\mu,X)$ ist:

$$\int_E \phi(t)\, d\lambda(t) = \int_E F_n(t)\, d\lambda(t) \quad \text{und insgesamt}$$

$$\mathbb{E}^{L_1(\mu,X)}_{D_n} \phi(t) = F_n(t) \qquad \text{für } \lambda\text{-fast alle } t \in [0,1]. \qquad \square$$

Aus Satz (3.21.) und [4, S.412, Prop. 2.2] erhalten wir folgende Korollare:

<u>(3.22.) Korollar:</u> Es seien (S,Σ,μ), $(\Omega,\mathbb{A},\mathbb{P})$, X und m wie im Satz (3.21.) Dann besitzt m genau dann eine Bochnerdichte, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine Menge $\Omega_\varepsilon \in \mathbb{A}$ existiert mit:

(i) $\mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$.

(ii) Für alle $A \in \Sigma_e$ und $T \in \Lambda^A_0(c_0)$ ist $Ar(T \circ m_{|\Omega_\varepsilon})$ relativ schwach kompakt.

<u>(3.23.) Korollar:</u> Sind (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.) und X ein reeller Banachraum mit der RNP, so besitzt auch jede abgeschlossene, beschränkte, konvexe und gleichgradig integrierbare Teilmenge von $L_1(\mu,X)$ die RNP.

Wir wollen nun noch einige geometrische Folgerungen von Korollar (3.23.) angeben.

<u>(3.24.) Korollar:</u> Es seien (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum und X ein reeller Banachraum mit der RNP, dann gilt für eine abgeschlossene, beschränkte, konvexe und gleichgradig integrierbare Teilmenge $K \subset L_1(\mu,X)$:

a) $K = \overline{co}(\text{str exp}(K))$.

b) Für alle $f_0 \in K$ gibt es ein $\nu \in M(K,\|\cdot\|)$ mit $f_0 = \int_{\text{extr } K} f \, d\nu(f)$.

<u>Beweis:</u> a) erhält man sofort aus (3.23.) und [7, S.55, Th. 3.5.4.], während man b) mit (3.23.) und [7, S.182, Th. 6.2.9.] folgert. □

Das folgende einfache Beispiel zeigt, daß es abgeschlossene, beschränkte und konvexe Teilmengen in $L_1(\mu)$ gibt, die die RNP besitzen und nicht gleichgradig integrierbar sind.

<u>(3.25.) Beispiel:</u> Wir setzen $(S,\Sigma,\mu) := ([0,1], \mathfrak{B} \cap [0,1], \lambda)$ und $X := \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := [2^{-n-1}, 2^{-n}[$ und $f := 2^{n+1} \chi_{A_n}$.

Es gilt dann $\|f_n\| = 1$ und $\int_{A_n} f_n \, d\lambda = 1$, d.h. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht gleichgradig integrierbar. Setzen wir $K := \overline{co}(f_n ; n \in \mathbb{N})$, so ist K eine abgeschlossene, beschränkte und konvexe Teilmenge. K besitzt die RNP, denn die Abbildung

$$T : \text{span}(f_n ; n \in \mathbb{N}) \longrightarrow \ell_1$$

$$\sum_{n=1}^{m} a_n f_n \longmapsto \sum_{n=1}^{m} a_n e_n \qquad (e_n \text{ n-ter Einheitsvektor})$$

ist linear und es gilt

$$\|\sum_{n=1}^{m} a_n f_n\|_1 = \int_S |\sum_{n=1}^{m} a_n f_n(s)| \, ds = \sum_{n=1}^{m} \int_{A_n} |a_n| \, 2^{n+1} \, ds$$

$$= \sum_{n=1}^{m} |a_n| = \|\sum_{n=1}^{m} a_n e_n\|_1 .$$

Damit stellt T eine Isometrie aufs Bild dar, und es gibt eine Fortsetzung $T : \overline{\mathrm{span}}(f_n, n \in \mathbb{N}) \to \ell_1$, die eine Isometrie ist. $\square$

§ 4. Renormierung von Teilräumen in $L_1(\mu,X)$

In (2.1.) zeigten wir, daß jeder σ'-kompakt erzeugte Teilraum L strikt konvex renormierbar ist, indem wir einen linearen, injektiven und beschränkten Operator $T : L \to c_0(\Gamma)$ konstruierten. Damit erhebt sich die Frage, ob, wie dies für WCG-Banachräume möglich ist, jeder σ'-kompakt erzeugte Teilraum lokal uniform konvex renormierbar ist. Wenn man den Beweisgedanken von S. Troyanski (vgl. [51, S.177, Th. 1]) aufgreift, so kann man dies in der Tat beweisen. Dieses Problem ist der Ausgangspunkt für eine allgemeine Fragestellung:

> Läßt sich eine hinreichende Bedingung für die lokal uniform konvexe Renormierbarkeit eines Teilraumes L finden, die nur von den Werten $I_A(L)$ für $A \in \Sigma_e$ abhängt?

Mit der positiven Beantwortung dieser Frage können wir zwei Probleme lösen. Zum ersten folgt, daß σ'-kompakt erzeugte Teilräume lokal uniform konvex renormierbar sind.

Ferner zeigt sich, daß $L_1(\mu,X)$ genau dann lokal uniform konvex renormierbar ist, wenn X eine äquivalente lokal uniform konvexe Norm besitzt.

Der Hauptsatz (4.1.1.) wird eine Antwort auf die oben gestellte Frage geben.

Vergleicht man die gängigen Renormierungstechniken (vgl. [24],[55]), so wird dort versucht, den zu renormierenden Raum L in ein $c_0(\Delta)$ abzubilden, um

mit Hilfe der Day-Norm auf $c_0(\Delta)$ eine äquivalente Norm zu definieren. Dabei trachtet man danach, durch geeignete Abbildungen $S_\gamma : L \to L$ $(\gamma \in \Delta)$ diese nicht notwendig lineare Einbettung in $c_0(\Delta)$ zu erhalten. S. Troyanski hat in [51] diesen Weg beschritten, wobei er allerdings die starke Einschränkung machte, daß $S_\gamma L$ separabel sein muß. Da wir die Situation eines beliebigen Banachraumes X und eines beliebigen Teilraumes L betrachten wollen, findet man als mögliche Operatorenfamilie, die noch geeignete Eigenschaften besitzen, nur die "lange Folge" von Erwartungswertoperatoren $(\mathbb{E}_\alpha)_{\omega \leq \alpha < \lambda}$ zu einer aufsteigenden Familie von Teil-σ-Algebren. Allerdings können wir nicht erwarten, daß für alle $\omega \leq \alpha < \lambda$ $(\mathbb{E}_{\alpha+1} - \mathbb{E}_\alpha)(L)$ für einen beliebigen Teilraum L separabel ist. Deshalb können wir die Technik von S. Troyanski nicht direkt übernehmen. Wir werden daher in Satz (4.2.3.) ein allgemeines Kriterium entwickeln, das nicht die Separabilität von S_γ voraussetzt. Dieses Kriterium findet im Beweis des Hauptsatzes als Hilfsmittel für den Induktionsschritt Eingang. Allerdings muß man, um die Induktionsannahme auswerten zu können, die spezielle Struktur des Operators $(\mathbb{E}_{\alpha+1} - \mathbb{E}_\alpha)$ kennen. Für beliebige endliche, positive Maßräume stellen sich hier Schwierigkeiten ein, so daß wir mit Hilfe einer isometrischen Darstellung von $L_1(\mu,X)$ (vgl. (4.1.2.)) die Problemstellung auf die leichter zu untersuchenden Maßräume $(D_{\lambda_0}, Q_{\lambda_0}, \nu_{\lambda_0})$ (vgl. (1.3.7.1.)) zurückführen (vgl. (4.4.)). Der Fall eines beliebigen endlichen Maßraumes vom Typ (1.3.3.5.) wird mit der isometrischen Darstellung aus Lemma (2.1.2.) behandelt.

In die gesamte Betrachtung beziehen wir die σ'-Topologie mit ein. Die von uns konstruierte äquivalente lokal uniform konvexe Norm wird σ'- nach unten halbstetig sein. Daraus lassen sich einige Beziehungen zwischen der σ'- und der Normtopologie ableiten. Sie sind die Motivation, den Begriff der

σ'-Kadec-Norm (vgl. (1.2.7.b)) einzuführen und diese zu untersuchen. Es ist unbekannt, ob ein Teilraum L mit einer $\sigma' \cap L$-Kadec-Norm eine äquivalente lokal uniform konvexe Norm besitzt.

(4.1.) Der Hauptsatz

Wir wollen vorab das Hauptergebnis dieses Paragraphen über die Renormierbarkeit von Teilräumen in $L_1(\mu,X)$ formulieren. Mit diesem Satz werden wir in der Lage sein, Renormierungsfragen für bestimmte Teilräume in $L_1(\mu,X)$ (wie z.B. die σ'-kompakt erzeugten Teilräume) zu beantworten (vgl. (4.6.)). Der gesamte Paragraph hat den Beweis des Hauptsatzes zum Ziel.

(4.1.1.) Satz: Es sei (S,Σ,μ) ein Maßraum gemäß (1.3.3.5.). Weiter sei $L \subset L_1(\mu,X)$ ein Teilraum mit der Eigenschaft:

Für alle $A,B \in \Sigma_e$, $A \cap B = \emptyset$ besitzt $(I_A - I_B)(L)$ eine äquivalente lokal uniform konvexe Norm (bzw. Kadec-Norm).

Dann existiert auf L eine $\sigma' \cap L$-nach unten halbstetige lokal uniform konvexe Norm (bzw. $\sigma' \cap L$-Kadec-Norm) $|||\cdot|||$ mit $\frac{1}{2}\|f\|_1 \leq |||f||| \leq \|f\|_1$ für alle $f \in L$. In diesem Fall stimmt auf $S(L,|||\cdot|||)$ die Norm- mit der $\sigma' \cap L$-Topologie überein.

Der Beweis dieses Satzes wird in mehreren Schritten geführt. Dabei wird die von uns verwendete Technik es notwendig machen, im Falle eines endlichen positiven Maßraumes das Problem auf den im 1. Paragraphen eingeführten Maßraum $(D_{\lambda_0},Q_{\lambda_0},\nu_{\lambda_0})$ (vgl. (1.3.7.1.)) zurückzuspielen. Daher ist es verständlich, daß wir im nächsten Lemma eine vektorwertige Version der Darstellung von

$L_1(\mu)$-Räumen geben, wie sie für den skalaren Fall in (1.3.7.3.) vorgenommen wurde. Wir beziehen dabei die σ'-Topologie mit ein.

<u>(4.1.2.) Lemma:</u> Es sei (S,Σ,μ) ein positiver, endlicher Maßraum. Dann gibt es disjunkte abzählbare Mengen I_1, I_2, Kardinalzahlen m_i $(i \in I_2)$ und eine Isometrie $T : L_1(\mu,X) \to \big((\bigoplus_{i\in I_1} X) \oplus (\bigoplus_{i\in I_2} L_1(D_{\lambda_i},X))\big)_{\ell_1}$

(λ_i die erste Ordinalzahl der Kardinalität m_i, D_{λ_i} gemäß (1.3.7.1.) $(i \in I_2)$), die ein

$\sigma' - \sigma\Big(\big((\bigoplus_{i\in I_1} X) \oplus (\bigoplus_{i\in I_2} L_1(D_{\lambda_i},X))\big)_{\ell_1}, \big((\bigoplus_{i\in I_1} X') \oplus (\bigoplus_{i\in I_2} L_\infty(D_{\lambda_i},X'))\big)_{\ell_\infty}\Big)$ -

Homöomorphismus ist.

Es gilt ferner:

a) i) Es gibt eine Folge von Atomen $(A_i)_{i\in I_1} \subset \Sigma$ und eine Folge $(A_i)_{i\in I_2} \subset \Sigma$ derart, daß $A_{i_1} \cap A_{i_2} = \emptyset$ für $i_1,i_2 \in I_1 \cup I_2$, $i_1 \neq i_2$, und für alle $i \in I_1 \cup I_2$ und $f \in L_1(\mu,X)$ gilt: $pr_i(T(f)) = pr_i(T(f\chi_{A_i}))$, wobei pr_i die Projektion auf die i-te Komponente von $\big((\bigoplus_{i\in I_1} X) \oplus (\bigoplus_{i\in I_2} L_1(D_{\lambda_i},X))\big)_{\ell_1(I_1 \cup I_2)}$ ist.

ii) Für $i \in I_1$ ist $pr_i(T(f)) = I_{A_i}(f)$ $\quad (f \in L_1(\mu,X))$

b) Für $i \in I_2$ hat man:

i) Ist $B \in Q_{\lambda_i}$, so existiert $A \in \Sigma$, $A \subset A_i$ derart, daß für alle $f \in L_1(\mu,X)$

$I_B(pr_i(Tf)) = I_A(f)$ gilt.

ii) Sind $B^1, B^2 \in Q_{\lambda_i}$, $B^1 \cap B^2 = \emptyset$, dann gibt es $A^1, A^2 \in \Sigma$ $A^1, A^2 \subset A_1$, $A^1 \cap A^2 = \emptyset$, so daß für alle $f \in L_1(\mu, X)$

$$(I_{B^1} - I_{B^2})(pr_i(Tf)) = (I_{A^1} - I_{A^2})(f) \text{ gilt.}$$

<u>Beweis:</u> Wir betrachten die Mengen I_1, I_2, die unendlichen Kardinalzahlen $\mathfrak{m}_i$ $(i \in I_2)$ und die Isometrie

$$\tilde{T} : L_1(\mu) \to \big(\ell_1(I_1) \oplus (\bigoplus_{i \in I_2} L_1(D_{\lambda_i}))\big)_{\ell_1} \text{ aus (1.3.7.3.).}$$

Zunächst definieren wir T auf dem $\|\cdot\|_1$-dichten Teilraum $\mathcal{E}(S, \Sigma, \mu, X)$ wie folgt:

Ist $f = \sum_{j=1}^{n} x_j \chi_{C_j}$, $x_j \in X$, $C_j \in \Sigma$ paarweise disjunkt, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, so setze man

$$(1) \qquad Tf := \sum_{j=1}^{n} x_j \tilde{T}(\chi_{C_j}) .$$

Aus (1.3.7.3.) (iii) folgt, daß mit $(C_j)_{1 \le j \le n}$ paarweise disjunkt gilt:

$\tilde{T}(\chi_{C_j}) \wedge \tilde{T}(\chi_{C_k}) = 0$, falls $j \neq k$, $1 \le j, k \le n$. Damit hat man:

$$\|Tf\|_{\ell_1} = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \; \|\tilde{T}(\chi_{C_j})\|_{\ell_1} = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \; \mu(C_j) = \|f\|_1$$

und, da T linear ist, stellt

$T : \mathcal{E}(S, \Sigma, \mu, X) \to \big((\bigoplus_{i \in I_1} X) \oplus (\bigoplus_{i \in I_2} L_1(D_{\lambda_i}, X))\big)_{\ell_1(I_1 \cup I_2)}$ eine Isometrie aufs Bild dar. Also können wir T zu einer Isometrie aufs Bild

$T : L_1(\mu, X) \to \big((\bigoplus_{i \in I_1} X) \oplus (\bigoplus_{i \in I_2} L_1(D_{\lambda_i}, X))\big)_{\ell_1}$ fortsetzen.

Nach (1.3.7.3.) gibt es Atome $(A_i)_{i \in I_1} \in \Sigma$ (falls $I_1 \neq \emptyset$) und eine Folge $(A_i)_{i \in I_2} \in \Sigma$ derart, daß die A_i $(i \in I_1 \cup I_2)$ paarweise disjunkt sind, und daß für alle $f \in L_1(\mu)$

$$pr_i(\tilde{T}f) = pr_i(\tilde{T}(f\chi_{A_i})) \text{ gilt.}$$

Man kann o.E., $\bigcup_{i\in I_1\cup I_2} A_i = S$ annehmen, da $\mu(S \setminus \bigcup_{i\in I_1\cup I_2} A_i) = 0$.

Denn für $\tilde{S} := S \setminus \bigcup_{i\in I_1\cup I_2} A_i$ und $i \in I_1 \cup I_2$ gilt:

$pr_i(\tilde{T}(\chi_{\tilde{S}})) = pr_i(\tilde{T}(\chi_S \cdot \chi_{A_i})) = 0$. Somit hat man $\tilde{T}(\chi_{\tilde{S}}) = 0$, was $\chi_{\tilde{S}} = 0$ impliziert ($\tilde{T}$ ist Isometrie). Damit ist a) i) für $f \in \mathbb{E}(S,\Sigma,\mu,X)$ gezeigt. Da $\mathbb{E}(S,\Sigma,\mu,X)$ dicht in $L_1(\mu,X)$ liegt, ist a) i) erfüllt.

Es ist für $f \in L_1(\mu,X)$ und $i \in I_1$ $f\chi_{A_i} = x\chi_{A_i}$ mit geeignetem $x \in X$ (A_i ist Atom). Aus der Definition von T ergibt sich:

$$pr_i(T(f\chi_{A_i})) = \mu(A_i)x = I_{A_i}(f),$$ und a) ii) ist mit a) i) nachgewiesen.

Wir wollen nun zeigen, daß T surjektiv ist.

Nach (1.3.7.3.) gilt für $i \in I_1$:

(2) $\tilde{T}(\chi_{A_i}) = \mu(A_i)e_i$ (wobei wir für $i \in I_1 \cup I_2$ e_i als i-ten Einheitsvektor in $\ell_1(I_1 \cup I_2)$ auffassen, vgl. (1.1.)), und für $i \in I_2$ und $h = \sum_{j=1}^{n} r_j \chi_{B_j} \in \mathbb{E}(D_{\lambda_i},Q_{\lambda_i},\nu_{\lambda_i})$ ($r_j \in \mathbb{K}$; $1 \leq j \leq n$) gibt es $C_j \in \Sigma \cap A_i$ ($1 \leq j \leq n$), so daß für

(3) $f = \sum_{j=1}^{n} r_j K_i^{-1} \chi_{C_j}$ $\tilde{T}f = h\, e_i$ ist (K_i aus (1.3.7.3.) i) b)).

Nach Definition des Raumes $\{(\bigoplus_{i\in I_1} X) \oplus (\bigoplus_{i\in I_2} L_1(D_{\lambda_i},X))\}_{\ell_1(I_1\cup I_2)}$ ist der Teilraum

$$L := \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j e_{i_j} + \sum_{k=1}^{m} h_{i_k} e_{i_k} ;\ i_j \in I_1,\ i_k \in I_2,\ x_j \in X,\ h_{i_k} \in \mathbb{E}(D_{\lambda_{i_k}},Q_{\lambda_{i_k}},\nu_{\lambda_{i_k}},X),\ 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq m \right\}$$

normdicht in $\{(\bigoplus_{i\in I_1} X) \oplus (\bigoplus_{i\in I_2} L_1(D_{\lambda_i},X))\}_{\ell_1(I_1\cup I_2)}$.

Für $H := \sum_{j=1}^{n} x_j e_{i_j} + \sum_{k=1}^{m} h_{i_k} e_{i_k} \in L$ findet man nach (3) und der

Definition (1) $f_k \in \mathcal{E}(S,\Sigma,\mu,X)$, $f_k \chi_{A_{i_k}} = f_k$, so daß mit (2) und

$F := \sum_{j=1}^{n} x_j \chi_{A_{i_j}} + \sum_{k=1}^{m} f_k$ $T(F) = H$ gilt.

Andererseits sind Bilder von Banachräumen unter Isometrien abgeschlossen.

Also ist T surjektiv, da L dicht in $\{(\bigoplus_{i\in I_1} X) \oplus (\bigoplus_{i\in I_2} L_1(D_{\lambda_i} X))\}_{\ell_1(I_1 \cup I_2)}$ liegt.

Wir wollen nun b) nachweisen. Dazu sei $i \in I_2$ fest gewählt. Für $B \in Q_{\lambda_i}$ gibt es nach (1.3.7.3.) ein $A \in \Sigma \cap A_i$ mit

(4) $\tilde{T}(\chi_A) = K_i \chi_B e_i$.

Es sei $f = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{C_k} \in \mathcal{E}(S,\Sigma,\mu,X)$, $C_k \cap C_j = \emptyset$ für $k \neq j$, $k,j \in \{1,\dots,n\}$.

Mit (1.3.7.3.) gibt es paarweise disjunkte $B_k \in Q_{\lambda_i}$, $k \in \{1,\dots,n\}$, so daß $\tilde{T}(\chi_{A \cap C_k}) = K_i \chi_{B_k} e_i$. Insgesamt gilt dann:

$$I_A(f) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mu(A \cap C_k) \overset{(1.3.7.3.)}{=} \sum_{k=1}^{n} x_k K_i \nu_{\lambda_i}(B_k).$$

$$\overset{(1.3.7.3.)}{=} \sum_{k=1}^{n} x_k K_i \nu_{\lambda_i}(B \cap B_k) = K_i I_B(\sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{B_k})$$

$$= I_B(pr_i(T(f\chi_A))) = I_{D_{\lambda_i}}(pr_i(T(f\chi_A))\chi_B)$$

$$\overset{n.\ (1)}{=} I_{D_{\lambda_i}}(\sum_{k=1}^{n} x_k pr_i(\tilde{T}(\chi_{C_k} \chi_A)) \chi_B)$$

$$\overset{n.(1.3.7.3.)}{=} I_{D_{\lambda_i}}(\sum_{k=1}^{n} x_k pr_i(\tilde{T}(\chi_{C_k})) \chi_B)$$

$$\overset{n.\ (1)}{=} I_B(pr_i(T(f))) .$$

Damit ist aber b) (i) auch für $f \in L_1(\mu,X)$ gezeigt, denn $\mathcal{E}(S,\Sigma,\mu,X)$ liegt dicht in $L_1(\mu,X)$.

Sind nun $B^1, B^2 \in Q_{\lambda_i}$, $B^1 \cap B^2 = \emptyset$, so gibt es nach (1.3.7.3.)

$A^1, A^2 \in \Sigma \cap A_i$, $A^1 \cap A^2 = \emptyset$ mit $pr_i\, \tilde{T}(\chi_{A_j}) = K_i\, \chi_{B_j}\, e_i$ $(j = 1,2)$.

Beachtet man (4) und Teil b) (i), dann läßt sich b) ii) folgern.

Wir wollen nun zeigen, daß T ein

$$\sigma' - \sigma\Big(\big((\bigoplus_{i\in I_1} X) \oplus (\bigoplus_{i\in I_2} L_1(D_{\lambda_i}, X))\big)_{\ell_1}, \big((\bigoplus_{i\in I_1} X') \oplus (\bigoplus_{i\in I_2} L_\infty(D_{\lambda_i}, X'))\big)_{\ell_\infty}\Big)$$

-Homöomorphismus ist.

Dazu betrachten wir den adjungierten Operator

$T^* : \big((\bigoplus_{i\in I_1} X') \oplus (\bigoplus_{i\in I_2} L_1(D_{\lambda_i}, X)')\big)_{\ell_\infty(I_1 \cup I_2)} \to L_1(\mu, X)'$ und müssen wegen (1.2.2.) nachweisen:

$$T^*\big((\bigoplus_{i\in I_1} X') \oplus (\bigoplus_{i\in I_2} L_\infty(D_{\lambda_i}, X'))\big)_{\ell_\infty(I_1 \cup I_2)} = L_\infty(\mu, X').$$

Zunächst sei $i \in I_2$ und $g_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j\, \chi_{B_j} \in \mathcal{E}(D_{\lambda_i}, Q_{\lambda_i}, \nu_{\lambda_i}, X')$.

Wir zeigen:

$$(5) \qquad T^*(g_i\, e_i) = \sum_{j=1}^{n} x'_j\, \tilde{T}^*(\chi_{B_j}\, e_i)$$

$$\overset{(1.3.7.3.)}{=} \sum_{j=1}^{n} K_i^{-1}\, x'_j\, e_{A_i}(\tilde{T}_i^{-1}(\chi_{B_j}))$$

$\Big(T_i^{-1} : L_1(D_{\lambda_i}, Q_{\lambda_i}, \nu_{\lambda_i}) \to L_1(A_i, \Sigma \cap A_i, \mu)$ ist eine Isometrie, die i) und ii) in (1.3.7.4.) erfüllt (vgl. (1.3.7.3.))$\Big)$.

Weil $\mathcal{E}(S, \Sigma, \mu, X)$ dicht in $L_1(\mu, X)$ ist, genügt es, um (5) zu zeigen:

Sind $x \in X$ und $A \in \Sigma$, so gilt

$$\langle x\, \chi_A, T^*(g_i\, e_i)\rangle = \langle x\, \chi_A, \sum_{j=1}^{n} x'_j\, \tilde{T}^*(\chi_{B_j}\, e_i)\rangle .$$

$$\langle x\, \chi_A, T^*(g_i\, e_i)\rangle = \langle x\, \tilde{T}(\chi_A), (\sum_{j=1}^{n} x'_j\, \chi_{B_j})\, e_i\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \langle x\, x'_j\rangle\, \langle \hat{T}(\chi_A), \chi_{B_j}\, e_i\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j' \rangle \langle \chi_A, \tilde{T}^*(\chi_{B_j} e_i) \rangle =$$

$$= \langle x \chi_A, \sum_{j=1}^{n} x_j' \tilde{T}^*(\chi_{B_j} e_i) \rangle$$

und (5) ist nachgewiesen.

Nun induziert T auf $L_{1,A_i}(\mu,X) := L_1(A_i, \Sigma \cap A_i, \mu_{|\Sigma \cap A_i}, X)$ in natürlicher Weise eine Isometrie (vgl. Teil a)), nämlich

$$T_i : L_{1,A_i}(\mu,X) \to L_1(D_{\lambda_i}, X)$$
$$f \mapsto pr_i(T(e_{A_i}(f))) .$$

Für den adjungierten Operator $T_i^* : L_1(D_{\lambda_i},X)' \to L_{1,A_i}(\mu,X)'$ gilt:

(6) Ist $G \in L_1(D_{\lambda_i},X)'$, so ist für $f \in L_{1,A_i}(\mu,X)$

$\langle f, T_i^* G \rangle = \langle e_{A_i}' f, T^*(G e_i) \rangle$, <u>denn</u>:

$$\langle f, T_i^* G \rangle = \langle T_i f, G \rangle = \langle pr_i(T(e_{A_i}(f))), G \rangle$$
$$= \langle T(e_{A_i}(f)), G e_i \rangle = \langle e_{A_i}(f), T^*(G e_i) \rangle .$$

Nach (5) gilt somit für $g = \sum_{j=1}^{n} x_j' \chi_{B_j} \in E(D_{\lambda_i}, Q_{\lambda_i}, \nu_{\lambda_i}, X')$

$$T_i^* g = \sum_{j=1}^{n} K_i^{-1} x_j' \tilde{T}_i^{-1}(\chi_{B_j}) .$$

Damit sind die Voraussetzungen von (1.3.7.5.) erfüllt, und wir erhalten

(7) $T_i^*(L_\infty(D_{\lambda_i}, X')) = L_\infty(A_i, \Sigma \cap A_i, \mu_{|\Sigma \cap A_i}, X')$.

Ist nun $g = ((x_i')_{i \in I_1}, (g_i)_{i \in I_2}) \in ((\bigoplus_{i \in I_1} X') \oplus (\bigoplus_{i \in I_2} L_\infty(D_{\lambda_i}, X')))_{\ell_\infty(I_1 \cup I_2)'}$

so setze man als punktweisen Limes

(8) $G = \sum_{i \in I_1} x_i' \chi_{A_i} + \sum_{i \in I_2} \tilde{e}_{A_i} \bullet T_i^*(g_i) \in L_\infty(\mu, X')$

(man beachte, daß T_i^* eine Isometrie und die abzählbare Familie $(A_i)_{i \in I_1 \cup I_2}$ paarweise disjunkt ist).

Es gilt für $f \in L_1(\mu,X)$:

(9) $\langle f,G\rangle = \langle f, T^*g\rangle$

Beweis hierzu:

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $E \subset I_1 \cup I_2$ endlich derart, daß für

$$B := \bigcup_{i\in E} A_i : \|f\,\chi_{S\setminus B}\|_1 = \int_{S\setminus B} \|f\|\,d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2(\|G\|_{L_\infty(\mu,X')} + |g|_\infty + 1)} .$$

Man errechnet dann:

$$\begin{aligned}
|\langle f,G\rangle - \langle f, T^*g\rangle| &\leq |\langle f\,\chi_{S\setminus B}, G\rangle| + |\langle f\,\chi_{S\setminus B}, T^*g\rangle| + \\
&\quad \sum_{i\in E} |\langle f\,\chi_{A_i}, G - T^*g\rangle| \\
&\underset{(T^* \text{ ist Isometrie})}{<} \varepsilon/2 + \varepsilon/2 + \sum_{i\in E} |\langle f\,\chi_{A_i}, G - T^*g\rangle| \\
&= \varepsilon + \sum_{i\in E\cap I_1} |\langle f\,\chi_{A_i}, G\,\chi_{A_i} - (T^*g)\rangle| + \\
&\quad \sum_{i\in E\cap I_2} |\langle f\,\chi_{A_i}, \tilde{e}_{A_i}(T_i^*(g_i)) - (T^*g)\rangle| \\
&= \varepsilon + \sum_{i\in E\cap I_1} |\langle f, x_i'\,\chi_{A_i}\rangle - \langle T(f\,\chi_{A_i}), g\rangle| + \\
&\quad \sum_{i\in E\cap I_2} |\langle T_i(R_{A_i} f), g_i\rangle - \langle T(f\,\chi_{A_i}), g\rangle| \\
&\underset{\text{n. a)}}{=} \varepsilon + \sum_{i\in E\cap I_1} |\langle f, x_i'\,\chi_{A_i}\rangle - \langle pr_i(T(f\,\chi_{A_i})), g_i\rangle| + \\
&\quad \sum_{i\in E\cap I_2} |\langle T(e_{A_i}(R_{A_i} f)), g_i\,e_i\rangle - \\
&\qquad - \langle T(f\,\chi_{A_i}), g_i\,e_i\rangle| + \\
&\underset{\text{n. (5)}}{=} \varepsilon + \sum_{i\in E\cap I_1} |\langle f, x_i'\,\chi_{A_i}\rangle - \\
&\qquad - \langle f\,\chi_{A_i}, x_i'\,\tilde{T}^*(\chi_{D_{\lambda_i}} e_i)\rangle| + \\
&\quad \sum_{i\in E\cap I_2} |\langle f\,\chi_{A_i}, T^*(g_i\,e_i)\rangle - \\
&\qquad - \langle f\,\chi_{A_i}, T^*(g_i\,e_i)\rangle| \\
&= \varepsilon \quad (\text{denn } \tilde{T}^*(\chi_{D_{\lambda_i}} e_i) = \chi_{A_i} \text{ nach (1.3.7.3.)}).
\end{aligned}$$

Damit gilt also $T^*\Big(\big((\bigoplus_{i\in I_1} X') \oplus (\bigoplus_{i\in I_2} L_\infty(D_{\lambda_i},X'))\big)_{\ell_\infty(I_1 \cup I_2)}\Big) \subset L_\infty(\mu,X')$.

Ist andererseits $G \in L_\infty(\mu,X')$, so läßt sich G in der Form

$G = \sum_{i\in I_1} x_i' \chi_{A_i} + \sum_{i\in I_2} G \chi_{A_i}$ darstellen.

Setzt man für $i \in I_2$ nach (7) $g_i := T^{*-1}(\tilde{R}_{A_i} G)$, so erhält man

($\tilde{T}^*$ bzw. T^* sind Isometrien):

$$g = \big(\{x_i' \tilde{T}(\chi_{A_i})\}_{i\in I_1}, (g_i)_{i\in I_2}\big) \in \big((\bigoplus_{i\in I_1} X') \oplus (\bigoplus_{i\in I_2} L_\infty(D_{\lambda_i},X'))\big)_{\ell_\infty(I_1 \cup I_2)}$$

Es ist dann gemäß (8) und (9):

$$\begin{aligned} T^*g &= \sum_{i\in I_1} x_i' \tilde{T}^{-1}(\tilde{T}(\chi_{A_i})) + \sum_{i\in I_2} \tilde{e}_{A_i} T_i^*(g_i) \\ &= \sum_{i\in I_1} x_i' \chi_{A_i} + \sum_{i\in I_2} \tilde{e}_{A_i} (T_i^*(T_i^{*-1}(\tilde{R}_{A_i} G))) \\ &= \sum_{i\in I_1} x_i' \chi_{A_i} + \sum_{i\in I_2} G \chi_{A_i} = G . \end{aligned}$$

Dies zeigt insgesamt:

$T^*\Big(\big((\bigoplus_{i\in I_1} X') \oplus (\bigoplus_{i\in I_2} L_\infty(D_{\lambda_i},X'))\big)_{\ell_\infty(I_1 \cup I_2)}\Big) = L_\infty(\mu,X')$ und das Lemma ist bewiesen. □

Wir kommen nun zum Beweis des Hauptsatzes (4.1.1.) und gliedern diesen in vier Schritte.

Im ersten Schritt befassen wir uns allgemein mit der Renormierung von Teilräumen in normierten Räumen. Wir entwickeln eine hinreichende Bedingung und beziehen verschiedene lokalkonvexe Topologien in die Betrachtung mit ein. Dieser Schritt bildet die Grundlage für die weiteren.

In den darauffolgenden Schritten wenden wir uns dem Raum $L_1(\mu,X)$ zu.

Während wir im zweiten Schritt den Fall eines separablen, endlichen und positiven Maßraumes betrachten, behandelt der dritte Schritt den speziellen

endlichen Maßraum $(D_{\lambda_0}, Q_{\lambda_0}, \nu_{\lambda_0})$ (vgl. (1.3.7.)). Für den Beweis des Satzes in der Situation eines endlichen Maßraumes (S,Σ,μ) benötigen wir besondere Kenntnis von der Struktur der Erwartungswertoperatoren, die man für den Maßraum $(D_{\lambda_0}, Q_{\lambda_0}, \nu_{\lambda_0})$ gut untersuchen kann.

Im letzten Schritt wird mit Hilfe von Lemma (4.1.2.) und Lemma (2.1.2.) der Satz für einen Maßraum (S,Σ,μ) vom Typ (1.3.3.5.) bewiesen.

(4.2.) Renormierungskriterien in normierten Räumen.

In diesem Abschnitt wollen wir die abstrakten Grundlagen für den Beweis des Satzes legen. Wir beginnen mit zwei technischen Lemmata.

(4.2.1.) Lemma: Es seien Y_1, Y_2 normierte Räume, Δ eine unendliche Menge und

$$Q : Y_1 \to c_0^+(\Delta) \quad \text{derart, daß}$$

für alle $\delta \in \Delta$ $\quad Q_\delta : Y_1 \to \mathbb{R}^+$

$$y \mapsto Qy(\delta) \quad \text{eine Halbnorm darstellt.}$$

Weiter sei $\quad T : Y_1 \to Y_2$ ein linearer beschränkter Operator.

Es existiere ein $\delta_0 \in \Delta$, so daß für alle $y \in Y_1$

$$Qy(\delta_0) = \|Ty\| \ .$$

Bezeichnet p die Day-Norm auf $c_0(\Delta)$, so gilt für $y \in Y_1$ und eine Folge $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset Y_1$ mit Eigenschaften:

a) $(p \circ Q)(y_i) \xrightarrow{i\to\infty} (p \circ Q)(y)$ und

b) $(p \circ Q)(y + y_i) \xrightarrow{i\to\infty} 2(p \circ Q)(y)$:

$\|Qy_i - Qy\|_\infty \xrightarrow{i\to\infty} 0$ und

$\|T(y + y_i)\| \xrightarrow{i\to\infty} 2\,\|Ty\|$.

Ist Y_2 zusätzlich ein lokal uniform konvexer Raum, so hat man $Ty_i \xrightarrow{i\to\infty} Ty$ in $(Y_2, \|\cdot\|)$.

<u>Beweis:</u> Wir wählen eine Folge $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset Y_1$ und $y \in Y_1$ mit den Eigenschaften a) und b).

Aus a), b) und [46, S.705, 20.2] folgt:

(1) $\|Qy_i - Qy\|_\infty \xrightarrow{i\to\infty} 0.$

Wir beweisen nun $\|T(y + y_i)\| \xrightarrow{i\to\infty} 2\,\|Ty\|$.

Man kann nach (1) o.E. $Ty \neq 0$ annehmen und findet erneut nach (1) ein $m \in \mathbb{N}$, so daß für alle $i \geq m$ $\|Ty_i\| > 0$ ist. Wir nehmen o.E. $m = 1$ an und zeigen, daß jede Teilfolge $(y_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine weitere Teilfolge $(y_{i_{j_h}})_{h\in\mathbb{N}}$ enthält mit

$\|T(y + y_{i_{j_h}})\| \xrightarrow{h\to\infty} 2\,\|Ty\|$. Denn daraus folgt sofort

$\|T(y + y_i)\| \xrightarrow{i\to\infty} 2\,\|Ty\|$.

Es sei $(y_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Teilfolge von $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Zur Vereinfachung der Schreibweise setze man $(y_{i_j})_{j\in\mathbb{N}} = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein:

$E(y) := \{\delta \in \Delta\ ;\ Qy(\delta) > 0\} = \{\delta_1, \delta_2, \ldots,\}$, wobei wir $Qy(\delta_k) \geq Qy(\delta_{k+1})$ $(k \in \mathbb{N})$ annehmen können.

In gleicher Weise definieren wir:

$E(y_i) := \{\delta_k^i\ ;\ k \in \mathbb{N}\}$ und $E\big((y + y_i)\big) := \{\beta_k^i\ ;\ k \in \mathbb{N}\}$ $(i \in \mathbb{N})$.

Es ist $\delta_0 \in E(y)$, deshalb gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\delta_N = \delta_0$.

Weiter sei N_1 die größte natürliche Zahl mit $Qy(\delta_{N_1}) = Qy(\delta_N) = Qy(\delta_0)$.

Wir definieren ferner

$\theta := \inf\{Qy(\delta_k) - Qy(\delta_{k+1})\ ;\ Qy(\delta_k) \neq Qy(\delta_{k+1})\ ,\ k \leq N_1\}$,

wobei wir $Qy(\delta_{N_1+1}) := 0$ setzen, falls $\mathrm{card}(E(y)) = N_1$ ist.

Es ist dann $\theta > 0$, denn wir hatten $\|Ty\| > 0$ angenommen.

Wegen (1) findet man ein $m \in \mathbb{N}$, so daß für alle $i \geq m$ und für alle $\delta \in \Delta$:

(2) $|Qy(\delta) - Qy_i(\delta)| < \frac{\theta}{2}$.

Insbesondere gilt damit für $i \in \mathbb{N}$, $i \geq m$: $\{\delta_k \; ; \; k \leq N_1\} = \{\delta_k^i \; ; \; k \leq N_1\}$.

Da $\{\delta_k^i \; ; \; k \leq N_1\}$ für alle $i \geq m$ endlich ist, existiert eine Teilfolge $(y_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$, so daß für alle $j \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1,\ldots, N_1\}$

$\delta_k^{i_j} = \delta_k^{i_{j+1}}$.

Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß $m = 1$ und $(y_{i_j})_{j\in\mathbb{N}} = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gilt.

Da man $\{\delta_k \; ; \; k \leq N_1\} = \{\delta_k^i \; ; \; k \leq N_1\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ hat, findet man eine Permutation $\Pi : \{1,\ldots, N_1\} \longrightarrow \{1,\ldots, N_1\}$, so daß $\delta_{\Pi(k)} = \delta_k^i$ für $i \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1,\ldots, N_1\}$ gilt.

Es folgt für $k \in \{1,\ldots, N_1 - 1\}$ $Qy(\delta_{\Pi(k)}) \geq Qy(\delta_{\Pi(k+1)})$, denn angenommen für ein $k \in \{1,\ldots, N_1 - 1\}$ gilt $Qy(\delta_{\Pi(k)}) < Qy(\delta_{\Pi(k+1)})$, so ergibt sich aus der Definition von θ:

$Qy(\delta_{\Pi(k+1)}) - Qy(\delta_{\Pi(k)}) \geq \theta$.

Mit (2) folgt

$Qy_i(\delta_{k+1}^i) - Qy_i(\delta_k^i) > 0$, was im Widerspruch zur Definition steht.

Damit gilt $\sum_{k=1}^{N_1} 4^{-k}\, Qy(\delta_k)^2 = \sum_{k=1}^{N_1} 4^{-k}\, Qy(\delta_{\Pi(k)})^2$ und

$$(p \circ Q)(y) = \sum_{k=1}^{N_1} 4^{-k}\, Qy(\delta_{\Pi(k)})^2 + \sum_{k>N_1} 4^{-k}\, Qy(\delta_k)^2.$$

Daher kann man $\Pi = \mathrm{id}$ o.E. annehmen.

Wir haben für $i \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq N_1$:

(3) $\delta_k = \delta_k^i$.

Man errechnet nun:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k}(Qy(\beta_k^i) - Qy_i(\beta_k^i))^2$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k}\left(2(Qy(\beta_k^i))^2 + 2(Qy_i(\beta_k^i))^2 - (Qy(\beta_k^i) + Qy_i(\beta_k^i))^2\right)$$

$$\underset{(1.2.7.5.)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k}\left(2(Qy(\delta_k))^2 + 2(Qy_i(\delta_k^i))^2 - (Qy(\beta_k^i) + Qy_i(\beta_k^i))^2\right)$$

$$\underset{\substack{\text{(die } Q_\delta \\ \text{sind Halbnormen)}}}{\leq} 2(p \circ Q)(y)^2 + 2(p \circ Q)(y_i)^2 - \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k}(Q(y + y_i)(\beta_k^i))^2$$

$$= 2(p \circ Q)(y)^2 + 2(p \circ Q)(y_i)^2 - (p \circ Q)(y + y_i)^2.$$

Mit a) und b) des Lemmas ergibt sich:

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k}(Qy(\beta_k^i) - Qy_i(\beta_k^i))^2 \xrightarrow{i \to \infty} 0 \quad .$$

Aufgrund der Subadditivität der Q_δ ist für jedes $\delta \in \Delta$ und $i \in \mathbb{N}$:

$$(5) \quad Q(y + y_i)(\delta)^2 \leq (Qy(\delta) + Qy_i(\delta))^2$$

$$\leq 2(Qy(\delta)^2 + Qy_i(\delta)^2) \; .$$

Nach (1) hat man $\|Qy_i - Qy\|_\infty \xrightarrow{i \to \infty} 0$, so daß

(6) $\|T(y_i)\| \xrightarrow{i \to \infty} \|Ty\|$ folgt.

Wir wollen nun zeigen, daß $\|T(y + y_i)\|^2 \xrightarrow{i \to \infty} 4\,\|Ty\|^2$ gilt. Angenommen dies gilt nicht, dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(y_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ derart, daß nach (5) und (6) für alle $j \in \mathbb{N}$

(7) $\|T(y + y_{i_j})\|^2 \leq 2(\|Ty\|^2 + \|Ty_{i_j}\|^2) - \varepsilon$ folgt.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

<u>1. Fall:</u> Es gibt ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $j \geq j_0$ ein $\beta_{k_j}^{i_j} \in E(y + y_{i_j})$ existiert mit $\beta_{k_j}^{i_j} = \delta_N$ und $1 \leq k_j \leq N_1$:

Dann folgt für $j \geq j_0$:

$$(8)\quad 0 < 4^{-N_1}\,\varepsilon \leqq 4^{-k_j}\,\varepsilon \leqq$$

$$\underset{(7)}{\leqq}\quad 4^{-k_j}\big(2Qy(\beta_{k_j}^{i_j})^2 + 2Qy_{i_j}(\beta_{k_j}^{i_j})^2 - Q(y+y_{i_j})(\beta_{k_j}^{i_j})^2\big)$$

$$\underset{(5)}{\leqq}\quad 4^{-k_j}\big(2Qy(\beta_{k_j}^{i_j})^2 + 2Qy_{i_j}(\beta_{k_j}^{i_j})^2 - Q(y+y_{i_j})(\beta_{k_j}^{i_j})^2\big)$$

$$+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq k_j}}^{\infty} 4^{-k}\big(2Qy(\beta_k^{i_j})^2 + 2Qy_{i_j}(\beta_k^{i_j})^2 - Q(y+y_{i_j})(\beta_k^{i_j})^2\big)$$

$$\underset{(1.2.7.5.)}{\leqq}\quad \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k}\big(2Qy(\delta_k)^2 + 2Qy_{i_j}(\delta_k^{i_j})^2 - Q(y+y_{i_j})(\beta_k^{i_j})^2\big)$$

$$=\quad 2(p\circ Q)(y)^2 + 2(p\circ Q)(y_{i_j})^2 - (p\circ Q)(y+y_{i_j})^2 .$$

<u>2. Fall:</u> Es existiert eine Teilfolge $(y_{i_{j_h}})_{h\in\mathbb{N}}$ von $(y_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$,

so daß $\delta_N \notin E(y + y_{i_{j_h}})$ oder $\delta_N = \beta_{k_h}^{i_{j_h}} \in E(y + y_{i_{j_h}})$ mit

$k_h > N_1$ $(h \in \mathbb{N})$.

Zur Vereinfachung der Schreibweise nehmen wir $(y_{i_{j_h}})_{h\in\mathbb{N}} = (y_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$

an. Da $N \leqq N_1$ gilt, hat man $\{\delta_1,\ldots,\delta_{N_1}\} \neq \{\beta_1^{i_j},\ldots,\beta_{N_1}^{i_j}\}$.

Somit gibt es für alle $j \in \mathbb{N}$ ein $r_j \in \{1,\ldots,N_1\}$ mit

$\beta_{r_j}^{i_j} \notin \{\delta_1,\ldots,\delta_{N_1}\}$. Man erhält für jedes $j \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1,\ldots,N_1\}$:

$$(9)\quad 2Qy(\delta_k)^2 + 2Qy_{i_j}(\delta_k^{i_j})^2 - Q(y+y_{i_j})(\beta_{r_j}^{i_j})^2 \underset{(5)}{\geqq}$$

$$2\big(Qy(\delta_k)^2 + Qy_{i_j}(\delta_k^{i_j})^2\big) - 2Qy(\beta_{r_j}^{i_j})^2 - 2Qy_{i_j}(\beta_{r_j}^{i_j})^2 \underset{(2)\ \text{u.}\ (3)}{\geqq}$$

$$2\left(\big(Qy(\beta_{r_j}^{i_j}) + \theta\big)^2 + \left(Qy_{i_j}(\beta_{r_j}^{i_j}) + \frac{\theta}{2}\right)^2\right) - 2Qy(\beta_{r_j}^{i_j})^2 - 2Qy_{i_j}(\beta_{r_j}^{i_j})^2 > \theta^2 .$$

Wir betrachten nun die zwei Möglichkeiten:

a) Es sei $j \in \mathbb{N}$ und $\delta_N \notin E(y + y_{i_j})$. Dann gilt:

(10) $$0 < 4^{-N_1}\,\theta^2 \leq$$

$$\underset{(5)}{\leq} \quad 4^{-r_j}\,\theta^2 + \sum_{\substack{k=1\\k\neq r_j}}^{\infty} 4^{-k}\big(2Qy(\beta_k^{i_j})^2 + 2Qy_{i_j}(\beta_k^{i_j})^2 - Q(y+y_{i_j})(\beta_k^{i_j})^2\big)$$

$$\underset{(9)}{<} \quad 4^{-r_j}\big(2Qy(\delta_N)^2 + 2Qy_{i_j}(\delta_N)^2 - Q(y+y_{i_j})(\beta_{r_j}^{i_j})^2\big)$$

$$+ \sum_{\substack{k=1\\k\neq r_j}}^{\infty} 4^{-k}\big(2Qy(\beta_k^{i_j})^2 + 2Qy_{i_j}(\beta_k^{i_j})^2 - Q(y+y_{i_j})(\beta_k^{i_j})^2\big)$$

$$\underset{(1.2.7.5.)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k}\big(2Qy(\delta_k)^2 + 2Qy_{i_j}(\delta_k^{i_j})^2 - Q(y+y_{i_j})(\beta_k^{i_j})^2\big)$$

(dabei beachte man, daß $\delta_N \notin E(y+y_{i_j})$ ist).

$$= \quad 2(p\circ Q)(y)^2 + 2(p\circ Q)(y_{i_j})^2 - (p\circ Q)(y+y_{i_j})^2 .$$

b) Es seien $j \in \mathbb{N}$ und $\delta_N \in E(y + y_{i_j})$ mit $\delta_N = \beta_{m_j}^{i_j}$, $m_j \in \mathbb{N}$, $m_j > N_1$.

Wir haben dann:

(11) $$2Qy(\beta_{r_j}^{i_j})^2 + 2Qy_{i_j}(\beta_{r_j}^{i_j})^2 \underset{(5)}{\geq} Q(y+y_{i_j})(\beta_{r_j}^{i_j})^2$$

$$\geq Q(y+y_{i_j})(\beta_{m_j}^{i_j})^2$$

(denn $r_j \leq m_j$).

Somit folgt:

(12) $$0 < 4^{-N_1}\,\theta^2 \leq$$

$$\underset{(11)}{\leq} \quad 4^{-N_1}\,\theta^2 + 4^{-m_j}\big(2Qy(\beta_{r_j}^{i_j})^2 + 2Qy_{i_j}(\beta_{r_j}^{i_j})^2 - Q(y+y_{i_j})(\beta_{m_j}^{i_j})^2\big)$$

$$\underset{(5)\ u.\ (9)}{<} \quad 4^{-r_j}\big(2Qy(\delta_N)^2 + 2Qy_{i_j}(\delta_N)^2 - Q(y+y_{i_j})(\beta_{r_j}^{i_j})^2\big)$$

$$+ 4^{-m_j}\left(2Qy(\beta_{r_j}^{i_j})^2 + 2Qy_{i_j}(\beta_{r_j}^{i_j})^2 - Q(y+y_{i_j})(\beta_{m_j}^{i_j})^2\right)$$

$$+ \sum_{\substack{k=1\\k\neq r_j\\k\neq m_j}}^{\infty} 4^{-k}\left(2Qy(\beta_k^{i_j})^2 + 2Q_{i_j}(\beta_k^{i_j})^2 - Q(y+y_{i_j})(\beta_k^{i_j})^2\right)$$

$$\underset{(1.2.7.5.)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k}\left(2Qy(\delta_k)^2 + 2Qy_{i_j}(\delta_k^i)^2 - Q(y+y_{i_j})(\beta_k^{i_j})^2\right)$$

(man beachte dabei, daß $\delta_N = \beta_{m_j}^{i_j} \neq \beta_{r_j}^{i_j}$ gilt)

$$= \quad 2(p\circ Q)(y)^2 + 2(p\circ Q(y_{i_j})^2 - (p\circ Q)(y+y_{i_j})^2 .$$

Wenn man nun beide Fälle betrachtet, so erhält man aus (8), (10) und (12):

$$2(p\circ Q)(y)^2 + 2(p\circ Q)(y_{i_j})^2 - (p\circ Q)(y+y_{i_j})^2 \overset{j\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 .$$

Dies steht aber im Widerspruch zu (4).

Damit haben wir (7) insgesamt widerlegt, und es gibt zu jeder Teilfolge $(y_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine weitere Teilfolge $(y_{i_{j_h}})_{h\in\mathbb{N}}$ derart, daß

$\|T(y+y_{i_{j_h}})\| \xrightarrow{h\to\infty} 2\,\|Ty\|$ gilt, und die Aussage ist gezeigt.

Falls $(Y_2,\|\cdot\|)$ ein lokal uniform konvexer Raum ist, so folgt aus (6) und $\|T(y+y_i)\| \xrightarrow{i\to\infty} 2\,\|Ty\|$ unter Beachtung von (1.2.7.1.):

$$\|T(y-y_i)\| \xrightarrow{i\to\infty} 0 . \qquad \square$$

Das nachfolgende Lemma formuliert den Inhalt von Lemma (4.1.2.) für eine $\sigma(Y,Z)$-Kadec-Norm.

<u>(4.2.2.) Lemma:</u> Es seien $(Y_1,\|\cdot\|_1)$ und $(Y_2,\|\cdot\|_2)$ Räume und $Z_i \subset Y_i'$ lineare Teilräume, die total auf Y_i sind $(i = 1,2)$.

Ferner sei Δ eine unendliche Menge und $Q : Y_1 \to c_0^+(\Delta)$ ein Abbildung, derart, daß für alle $\delta \in \Delta$ $Q_\delta : Y \to \mathbb{R}_+$ eine Halbnorm und $\sigma(Y_1,Z_1)$-nach unten halbstetig ist.
Weiter seien $|||\cdot|||$ eine zu $||\cdot||_2$ auf Y_2 äquivalente (Y_2,Z_2)-Kadec-Norm und

$T : Y_1 \to Y_2$ ein linearer, $\sigma(Y_1.Z_1)$-$\sigma(Y_2,Z_2)$-stetiger, beschränkter Operator.

Es existiere ein $\delta_0 \in \Delta$ derart, daß für alle $y \in Y_1$

$Qy(\delta_0) = |||Ty|||$ ist.

Ist p die Day-Norm auf $c_0(\Delta)$ und ist $(y_\iota)_{\iota\in I}$ ein gegen $y \in Y_1$ in $(Y_1,\sigma(Y_1,Z_1))$ konvergentes Netz mit der Eigenschaft $(p \circ Q)(y_\iota) \xrightarrow{\iota \in I} (p \circ Q)(y)$, so gilt:

$$\|Qy_\iota - Qy\|_\infty \xrightarrow{\iota \in I} 0 \quad \text{und} \quad Ty_\iota \xrightarrow{\iota \in I} Ty \quad \text{in} \quad (Y_2,\|\cdot\|_2).$$

<u>Beweis:</u> Wir wollen zuerst zeigen, daß für alle $\delta \in \Delta$

$|Qy_\iota(\delta) - Qy(\delta)| \xrightarrow{\iota \in I} 0$ gilt.

Wir nehmen deshalb an, es gibt ein $\delta \in \Delta$ und ein $\theta > 0$ derart, daß für alle $\iota_0 \in I$ ein $\iota \geq \iota_0$ existiert mit

(1) $|Qy_\iota(\delta) - Qy(\delta)| > \theta$.

Dann gilt aber:

(2) Für alle $\iota_0 \in I$ gibt es ein $\iota \geq \iota_0$ mit $Qy_\iota(\delta) > Qy(\delta) + \theta$.

<u>Denn:</u> Q_δ ist $\sigma(Y_1,Z_1)$-nach unten halbstetig und $y_\iota \xrightarrow{\iota \in I} y$ in der $\sigma(Y_1,Z_1)$-Topologie, also gibt es ein $\tau \in I$ mit $Qy(\delta) - \theta \leq Qy_\iota(\delta)$ für alle $\iota \geq \tau$.

Berücksichtigt man (1), so gibt es für alle $\iota_0 \in I$ ein $\iota \in I$ mit $\iota \geq \iota_0$, $\iota \geq \tau$ und $Qy_\iota(\delta) > Qy(\delta) + \theta$.

Wir wollen jetzt durch Konstruktion eines Teilnetzes zeigen, daß man o.E. annehmen kann, (2) gelte für alle $\iota \in I$.

Dazu sei $\mathfrak{U}$ der $\sigma(Y_1,Z_1)$-Umgebungsfilter von y und $A := \{(U,n)\ ;\ n \in \mathbb{N},\ U \in \mathfrak{U}\}$, wobei man auf $\mathfrak{U}$ die Ordnung $U \leq V :\Longleftrightarrow V \subset U$, sowie auf A die Ordnung $(U,n) \leq (V,m)$, falls $U \leq V$ und $n \leq m$, einführt.

Zu $(U,n) \in A$ gibt es dann nach Voraussetzung ein $\iota_0 \in I$, so daß für alle $\iota \leq \iota_0$

$y_\iota \in U$ und $|(p \circ Q)(y_\iota) - (p \circ Q)(y)| < \frac{1}{n}$.

Nach (2) existiert ein $\iota' \geq \iota_0$ mit

$Qy_{\iota'}(\delta) > Qy(\delta) + \theta$.

Wir definieren $y_{(U,n)} := y_{\iota'}$.

Damit ist $(y_{(U,n)})_{(U,n)\in A}$ ein Netz, das in der $\sigma(Y_1,Z_1)$-Topologie gegen y konvergiert. Man hat

$$|(p \circ Q)(y_{(U,n)}) - (p \circ Q)(y)| \xrightarrow[(U,n)\in A]{} 0 \quad \text{und}$$

$$Qy_{(U,n)}(\delta) > Qy(\delta) + \theta \quad .$$

Wir definieren nun $E(y) := \{\delta \in \Delta\ ;\ Qy(\delta) > 0\} = \{\delta_1,\delta_2,\ldots\}$, wobei $Q(y)(\delta_j) \geq Q(y)(\delta_{j+1})$ $(j \in \mathbb{N})$ ist und für $\iota \in I$ $E(y_\iota) := \{\delta \in \Delta\ ;\ Qy_\iota(\delta) > 0\} = \{\delta_1^\iota,\delta_2^\iota,\ldots\}$, dabei ist entsprechend $Q(y_\iota)(\delta_j^\iota) \geq Q(y_\iota)(\delta_{j+1}^\iota)$ $(j \in \mathbb{N})$.

Um die Annahme (1) zu widerlegen, unterscheiden wir nun zwei Fälle.

<u>1. Fall:</u> Es sei $Qy(\delta) > 0$. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\delta_{k_0} = \delta$ ist. Ferner sei $k_1 \geq k_0$ mit

$$\sum_{k>k_1} 4^{-k}(Qy(\delta_k))^2 < \frac{\theta^2}{2 \cdot 4^{k+1}} \ .$$

Für $\iota \in I$ erhalten wir dann:

$$(p \circ Q)(y_\iota)^2 - (p \circ Q)(y)^2$$

$$\underset{\text{(vgl. (1.2.7.5.))}}{\geq} \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k}\left(Q(y_\iota)(\delta_k)^2 - Q(y)(\delta_k)^2\right)$$

$$\geq 4^{-k_0}\left(Q(y_\iota)(\delta)^2 - Q(y)(\delta)^2\right) + \sum_{\substack{k \leq k_1 \\ k \neq k_0}} 4^{-k}\left(Q(y_\iota)(\delta_k)^2 - Q(y)(\delta_k)^2\right) - \frac{\theta^2}{2 \cdot 4^{k_0+1}} .$$

Die Abbildungen $Q_{\tilde{\delta}}$ $(\tilde{\delta} \in \Delta)$ sind $\sigma(Y_\iota, Z_\iota)$-nach unten halbstetig, so daß man ein $\iota_0 \in I$ derart findet, daß für alle $1 \leq k \leq k_1$, und $\iota \geq \iota_0$:

$$\frac{\theta^2}{2 \cdot 4^{k_0+1}} > Qy(\delta_k)^2 - Qy_\iota(\delta_k)^2 \quad \text{gilt.}$$

Damit folgt aber für $\iota \geq \iota_0$:

$$(p \circ Q)(y_\iota)^2 - (p \circ Q)(y)^2$$

$$\geq 4^{-k_0}\left(Qy_\iota(\delta)^2 - Qy(\delta)^2\right) - \frac{\theta^2}{2 \cdot 4^{k_0+1}} - \sum_{\substack{k \leq k_1 \\ k \neq k_0}} 4^{-k} \frac{\theta^2}{2 \cdot 4^{k_0+1}}$$

$$\geq 4^{-k_0}\left(Qy_\iota(\delta)^2 - Qy(\delta)^2\right) - \frac{\theta^2}{4^{k_0+1}} .$$

Nach (2) gilt dann aber für alle $\iota \geq \iota_0$:

$$(p \circ Q)(y_\iota)^2 - (p \circ Q)(y)^2 > \frac{\theta^2}{4^{k_0}} - \frac{\theta^2}{4^{k_0+1}} > \frac{\theta^2}{4^{k_0+1}} .$$

Dies steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung

$$\lim_{\iota \in I} (p \circ Q)(y_\iota) = (p \circ Q)(y).$$

2. Fall: Es sei $Qy(\delta) = 0$. Man wähle $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $k \geq k_0$ $0 < Qy(\delta_k) < \frac{\theta}{4}$ ist.

Es ist $\delta \notin E(y)$. Deshalb können wir folgende paarweise verschiedene Folge $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Delta$ definieren:

Es seien $\beta_{k_0} := \delta$ und für $k \in \mathbb{N}$, $k \neq k_0$ $\beta_k := \delta_k$.

Nach (1.2.7.5.) gilt dann für $\iota \in I$:

$$(3)\quad (p\circ Q)(y_\iota)^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k}\, Qy_\iota(\beta_k)^2$$

$$\geq \sum_{k<k_0} 4^{-k}\, Qy_\iota(\delta_k)^2 + 4^{-k_0}\, Qy_\iota(\delta)^2 .$$

Es folgt für $\iota \in I$:

$$(4)\quad (p\circ Q)(y_\iota)^2 - (p\circ Q)(y)^2 \underset{(3)}{\geq}$$

$$\sum_{k<k_0} 4^{-k}\{Qy_\iota(\delta_k)^2 - Qy(\delta_k)^2\} + 4^{-k_0}\, Qy_\iota(\delta)^2 - \sum_{k\geq k_0} 4^{-k}\, Qy(\delta_k)^2 .$$

Nach Wahl von $k_0 \in \mathbb{N}$ und $\theta > 0$ gilt für $\iota \in I$:

$$(5)\quad 4^{-k_0}\, Qy_\iota(\delta)^2 - \sum_{k\geq k_0} 4^{-k}\, Qy(\delta_k)^2 \geq 4^{-k_0}\,\theta^2 - 4^{-k_0}\,\frac{\theta^2}{4}$$

$$\geq 4^{-k_0}\,\theta^2(1-\tfrac{1}{4}) > 4^{-k_0}\,\frac{\theta^2}{2} .$$

Nun ist für alle $k < k_0$ Q_{δ_k} $\sigma(Y_\iota, Z_\iota)$-nach unten halbstetig, und man findet damit ein $\iota_0 \in I$ derart, daß für alle $\iota \geq \iota_0$ und $k < k_0$

$Qy(\delta_k)^2 - \dfrac{\theta^2}{4^{k_0+1}} \leq Qy_\iota(\delta_k)^2$ gilt.

Damit haben wir insgesamt mit (4) und (5) für $\iota \geq \iota_0$:

$$(p\circ Q)(y_\iota) - (p\circ Q)(y)^2 \geq \frac{\Theta^2}{2\cdot 4^{k_0}} - \frac{\theta^2}{4^{k_0+1}} \sum_{k<k_0} 4^{-k} > \frac{\theta^2}{4^{k_0+1}}$$

und einen Widerspruch zur Voraussetzung

$$(p\circ Q)(y_\iota) \xrightarrow{\iota\in I} (p\circ Q)(y).$$

Also ist die Annahme (1) falsch, und wir erhalten für alle $\delta \in \Delta$

$$(6)\quad Q(y_\iota)(\delta) \xrightarrow{\iota\in I} Q(y)(\delta).$$

p bildet nach (1.2.7.2.) eine zu $\|\cdot\|_\infty$ äquivalente Norm auf $c_0(\Delta)$. Nach Voraussetzung gibt es nun ein $\iota_0 \in I$, derart, daß für $\iota \geq \iota_0$ $(p\circ Q)(y_\iota) \leq (p\circ Q)(y) + 1$ ist.

Somit ist $\{Q(y_\iota)\}_{\iota\geq\iota_0}$ beschränkt in $c_0(\Delta)$.

Da in $c_0(\Delta)$ auf beschränkten Teilmengen die Topologie der punktweisen

Konvergenz mit der schwachen Topologie übereinstimmt, erhält man mit (6):

(7) $Q(y_\iota) \xrightarrow{\iota \in I} Q(y)$ in der schwachen Topologie.

Nach (1.2.7.7.) ist p als lokal uniform konvexe Norm auch eine Kadec--Norm, so daß wir mit (7), (1.2.7.8.) und der Voraussetzung $(p \circ Q)(y_\iota) \xrightarrow{\iota \in I} (p \circ Q)(y)$ nun $\|Qy_\iota - Qy\|_\infty \xrightarrow{\iota \in I} 0$ haben.

$T : Y_1 \to Y_2$ ist $\sigma(Y_1,Z_1)$-$\sigma(Y_2,Z_2)$-stetig, also gilt $Ty_\iota \xrightarrow{\iota \in I} Ty$ in $(Y_2,\sigma(Y_2,Z_2))$.

Wegen (6) haben wir $|||Ty_\iota||| \xrightarrow{\iota \in I} |||Ty|||$, so daß sich mit (1.2.7.8.) und der Tatsache, daß $|||\cdot|||$ eine $\sigma(Y_2,Z_2)$-Kadec-Norm ist, $|||Ty - Ty_\iota||| \xrightarrow{\iota \in I} 0$ ergibt.

Der Beweis des Lemmas ist damit abgeschlossen. □

Schon in der Einleitung zu diesem Abschnitt hatten wir erwähnt, daß die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit des Renormierungskriteriums von S. Troyanski [51, S.175, Prop. 1] in unserem Fall nicht erfüllt sein müssen.

Wir greifen den Beweisgedanken von S. Troyanski auf und formulieren ein alternatives Renormierungskriterium, wobei wir sowohl den Fall der lokal uniform konvexen Norm, wie auch der Kadec-Norm betrachten. Wir werden dabei die Existenz einer langen Kette von Projektionen $P_\alpha : Y \to Y$ ($\alpha \in I$, I eine Indexmenge) fordern. Damit läßt sich der Satz in folgenden Situationen anwenden:

- Falls Y WCG bzw. WCD ist, betrachte man als $(P_\alpha)_{\alpha \in I}$ die lange Kette von Projektionen nach D. Amir - J. Lindenstrauß [1, S.44, Lemma 6] bzw. L. Vašak [53, S.14, Th. 1].
- Besitzt Y eine transfinite Basis, so benütze man die zugeordneten Projektionen [46 , S.586, Def. 17.9.].

- Besitzt der Banachraum Y eine transfinite Schauderzerlegung, so wende man den Satz auf die zugeordneten Projektionen an (vgl. [46, S.623 - 626]).
- Im Falle eines endlichen, positiven Maßraumes (S,Σ,μ) wähle man für $Y := L_1(\mu,X)$ die "lange Folge" von Erwartungswertoperatoren $\mathbb{E}_{\Sigma_\alpha}$, die einer aufsteigenden Kette von Teil-σ-Algebren $(\Sigma_\alpha)_{\alpha\in I}$ zugeordnet sind.

Wir werden in unserer Betrachtung die letzten beiden Möglichkeiten ausnutzen.

<u>(4.2.3.) Satz:</u> Es seien $(Y,\|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$ und $Z \subset Y'$ ein auf Y totaler Teilraum, so daß $\|\cdot\| : Y \to \mathbb{R}$ $\sigma(Y,Z)$-nach unten halbstetig ist. Ferner sei für eine Limesordinalzahl $\lambda_0 > \omega$ $(P_\alpha)_{\omega\leq\alpha<\lambda_0}$ eine Familie von linearen und beschränkten Projektionen $P_\alpha : Y \to Y$ mit den Eigenschaften:

i) $\sup\limits_{\omega\leq\alpha<\lambda_0} \|P_\alpha\| < \infty$ und für alle Ordinalzahlen $\alpha, \omega \leq \alpha < \lambda_0$ ist P_α $\sigma(Y,Z)$-$\sigma(Y,Z)$-stetig.

ii) Für alle Ordinalzahlen $\alpha, \beta, \omega \leq \alpha \leq \beta < \lambda_0$ gilt $P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = P_\alpha$.

iii) Für alle Limesordinalzahlen $\beta, \omega < \beta < \lambda_0$ und $y \in Y$ gilt $P_\beta y = \lim\limits_{\alpha<\beta} P_\alpha y$ in $(Y,\|\cdot\|)$.

iv) Für alle $y \in Y$ gibt es eine Ordinalzahl $\alpha, \omega \leq \alpha < \lambda_0$ mit $P_\alpha y = y$.

Weiter sei $L \subset Y$ ein Teilraum mit den Eigenschaften:

I) Es existiert $K_\omega > 0$ und eine $\sigma(Y,Z) \cap P_\omega L$ - nach unten halbstetige lokal uniform konvexe (bzw. $\sigma(Y,Z) \cap P_\omega L$-Kadec-) Norm $\|\cdot\|_\omega$ auf $P_\omega L$ mit $K_\omega \|P_\omega y\| \leq \|P_\omega y\|_\omega \leq \|P_\omega y\|$ $(y \in L)$.

II) Für alle Ordinalzahlen $\alpha, \omega \leq \alpha < \lambda_0$ gibt es ein $K_{\alpha+1}$ und eine $\sigma(Y,Z) \cap (P_{\alpha+1} - P_\alpha)(L)$-nach unten halbstetige lokal uniform konvexe

(bzw. $\sigma(Y,Z) \cap (P_{\alpha+1} - P_\alpha)(L)$ - Kadec -) Norm $\|\cdot\|_{\alpha+1}$ auf $(P_{\alpha+1} - P_\alpha)(L)$ mit

$$K_{\alpha+1} \|(P_{\alpha+1} - P_\alpha)(y)\| \leq \|(P_{\alpha+1} - P_\alpha)(y)\|_{\alpha+1}$$
$$\leq \|(P_{\alpha+1} - P_\alpha)(y)\| \qquad (y \in L).$$

Dann existiert auf L eine $\sigma(Y,Z) \cap L$ - nach unten halbstetige lokal uniform konvexe (bzw. $\sigma(Y,Z) \cap L$ - Kadec-) Norm $|||\cdot|||$ mit $\frac{1}{2}\|y\| \leq |||y||| \leq \|y\|$ $(y \in L)$.

Auf $S(L,|||\cdot|||)$ stimmt die $\sigma(Y,Z) \cap L$ - Topologie mit der Normtopologie überein.

<u>Beweis:</u> Nach (i) ist $M := \sup_{\alpha \in [\omega,\lambda_0[} \|P_\alpha\| < \infty$.

Weiter definieren wir für eine Ordinalzahl α, $\omega \leq \alpha < \lambda_0$, eine endliche Teilmenge $A \subset [\omega,\lambda_0]$ und $y \in L$:

$R_\alpha := (P_{\alpha+1} - P_\alpha)|_L$, $R_{\lambda_0} := P_{\omega|L}$,

$d_{\lambda_0}(y) := \frac{1}{2}\|R_{\lambda_0}(y)\|_\omega$, $d_\alpha(y) := \frac{1}{2}\|R_\alpha(y)\|_{\alpha+1}$,

$S_A(y) := \sum_{\alpha \in A} d_\alpha(y)$ und $\Lambda(y) := \{\alpha \in [\omega,\lambda_0] ; d_\alpha y > 0\}$.

Aufgrund der Linearität von $P_\alpha (\omega \leq \alpha < \lambda_0)$ bilden d_α und S_A $(\alpha \in [\omega,\lambda_0]$, $A \subset [\omega,\lambda_0]$ endlich) Halbnormen auf L. Wir schreiben nun eine endliche Teilmenge $A \subset [\omega,\lambda_0]$ in der Form $A = \{\alpha_1,\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$, wobei $\alpha_j < \alpha_{j+1}$ für $1 \leq j \leq n-1$ ist.

Für $A \subset [\omega,\lambda_0]$ mit $\operatorname{card} A = n$ $(n \in \mathbb{N})$, $\xi = (\xi_j)_{j=1}^n \in \{0,1\}^n$, und $y \in L$ definiere man:

$$T_{A,\xi}(y) := \|y - (\sum_{j=1}^n \xi_j R_{\alpha_j}(y))\| .$$

$T_{A,\xi} : L \to \mathbb{R}$ stellt auf L eine Halbnorm dar.

(1) Es gibt nun für $y \in L \setminus \{0\}$ und $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $A \subset \Lambda(y)$, card $A = n$ $(n \in \mathbb{N})$, so daß für $\xi = (1,\ldots,1) \in \{0,1\}^n$ $T_{A,\xi}(y) < \varepsilon$ gilt.

Beweis hierzu: Wir wissen aufgrund von (iv), daß $L \subset \bigcup_{\omega \leq \alpha < \lambda_0} P_\alpha L$ ist.

Deshalb beweisen wir durch transfinite Induktion über $\beta \in [\omega, \lambda_0[$, daß (1) für alle $y \in P_\beta L \setminus \{0\}$ erfüllt ist.

Induktionsanfang: $\beta = \omega$: Dann ist $\Lambda(y) = \{\lambda_0\}$, und wir erhalten für $A := \{\lambda_0\}$ und $\xi = (1)$:

$T_{A,\xi}(y) = \|y - P_\omega y\| = 0.$

Induktionsannahme: Es sei β eine Ordinalzahl, $\omega \leq \beta < \lambda_0$, und (1) ist für alle α, $\omega \leq \alpha < \beta$, und $y \in P_\alpha L \setminus \{0\}$ erfüllt.

Induktionsschluß: 1. Fall: Es ist $\beta := \gamma + 1$ mit $\gamma \in [\omega, \beta[$.

Wir geben uns ein $y \in P_\beta L \setminus \{0\}$ und ein $\varepsilon > 0$ vor.

(1.1) Falls man $P_\gamma y = 0$ hat, so folgt $y = R_\gamma y \neq 0$.

Man setzt $A = \{\gamma\} \subset \Lambda(y)$ und erhält für $\xi = (1)$:

$T_{A,\xi}(y) = \|y - R_\gamma y\| = \|P_{\gamma+1} y - ((P_{\gamma+1} - P_\gamma)(y))\| = 0.$

(1.2) Wir setzen $P_\gamma y \neq 0$ voraus. Nach Induktionsannahme gibt es dann eine endliche Teilmenge $\overline{A} \subset \Lambda(P_\gamma y)$, card $\overline{A} = \overline{n}$ $(\overline{n} \in \mathbb{N})$ derart, daß für $\overline{\xi} = (1,\ldots,1) \in \{0,1\}^{\overline{n}}$

$T_{\overline{A},\overline{\xi}}(P_\gamma y) = \|P_\gamma y - \sum_{\alpha \in \overline{A}} R_\alpha(P_\gamma y)\| < \varepsilon$.

Wegen (ii) ist $\Lambda(P_\gamma y) \subset \Lambda(y)$. Wir setzen $A := \overline{A} \cup \{\gamma\}$ und können o.E. $A \subset \Lambda(y)$ annehmen (denn sonst ist $d_\gamma y = 0$ und damit $R_\gamma(y) = 0$, d.h. $y = P_\gamma y$).

Es folgt für $\xi = (1,\ldots,1) \in \{0,1\}^{\overline{n}+1}$:

$$T_{A,\xi}(y) = \|y - \sum_{\alpha \in A} R_\alpha y\| = \|P_{\gamma+1} y - ((P_{\gamma+1} - P_\gamma)(y) + \sum_{\alpha \in \overline{A}} R_\alpha y)\|$$

$$= \|P_\gamma y - \sum_{\alpha \in \overline{A}} R_\alpha y\|.$$

Für $\alpha \in \overline{A} \subset \Lambda(y)$ ist aber $\alpha = \lambda_0$ oder $\alpha \in [\omega,\gamma[$.

Mit (ii) folgt dann $R_\alpha y = R_\alpha(P_\gamma y)$ und damit

$$T_{A,\xi}(y) = \|P_\gamma y - \sum_{\alpha\in\overline{A}} R_\alpha(P_\gamma y)\| < \varepsilon \quad .$$

2. Fall: β ist eine Limeszahl.

Wegen (iii) gibt es zu $y \in P_\beta L \setminus \{0\}$ und $\varepsilon > 0$ ein $\gamma \in [\omega,\beta[$ mit $\|P_\beta y - P_\gamma y\| = \|y - P_\gamma y\| < \varepsilon/2$ und $P_\gamma y \neq 0$. Nach der Induktionsannahme existiert eine endliche Teilmenge $A \subset \Lambda(P_\gamma y)$, card $A = n$ $(n \in \mathbb{N})$, so daß sich mit $\xi = (1,\ldots,1) \in \{0,1\}^n$

$T_{A,\xi}(P_\gamma y) = \|P_\gamma y - \sum_{\alpha\in A} R_\alpha(P_\gamma y)\| < \varepsilon/2$ ergibt.

Wegen (ii) hat man $(P_\gamma y) \subset \Lambda(y)$, also ist $A \subset \Lambda(y)$. Ebenfalls mit (ii) hat man $A \subset [\omega,\gamma[\cup \{\lambda_0\}$, und es gilt $R_\alpha y = R_\alpha(P_\gamma y)$ für $\alpha \in A$. Somit folgt:

$$T_{A,\xi}(y) \leq \|y - P_\gamma y\| + \|P_\gamma y - \sum_{\alpha\in A} R_\alpha y\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \; .$$

Zu $k,n \in \mathbb{N}$ und $\xi \in \{0,1\}^n$ definiere man die Halbnorm

$$G_{k,n,\xi} : L \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$y \longmapsto \sup\{T_{A,\xi}(y) + k\, S_A(y)\, ; A \subset [\omega,\lambda_0], \text{card } A = n\} \; .$$

Es gilt für $y \in L$, $k, n \in \mathbb{N}$, $\xi \in \{0,1\}^n$, $\alpha \in [\omega,\lambda_0]$ und $A \subset [\omega,\lambda_0]$, card $A = n$, wenn man berücksichtigt, daß $M \geq 1$ nach (iv) ist:

(2) $d_\alpha(y) \leq M\,\|y\|$

(3) $S_A(y) \leq nM\,\|y\|$

(4) $T_{A,\xi}(y) \leq (2nM + 1)\,\|y\|$

(5) $G_{k,n,\xi}(y) \leq (2nM + 1)\,\|y\| + nkM\,\|y\|$

$$\underset{M\geq 1}{\leq} 2nM\,\|y\| + 2\,nkM\,\|y\| \leq 4\,nkM\|y\|$$

Wir setzen $\Delta := \{0\} \dot\cup [\omega,\lambda_0] \dot\cup \left(\mathbb{N}^2 \times \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{0,1\}^j\right)$ und definieren folgende Abbildung:

$Q : L \to c_0(\Delta)$

$$Qy(\delta) := \begin{cases} \|y\| & \text{falls } \delta = 0 \\ M^{-1}\, d_\alpha(y) & \text{falls } \delta = \alpha \in [\omega,\lambda_0] \\ (4\,k\,n\,M)^{-2}\, G_{k,n,\xi}(y) & \text{falls } \delta = (k,n,\xi) \in \mathbb{N}^2 \times \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{0,1\}^j \end{cases} .$$

Wir wollen zuerst zeigen, daß für $y \in L$ $\big(Qy(\delta)\big)_{\delta\in\Delta} \in c_0(\Delta)$ gilt:

(6) Mit (iii) läßt sich folgern, daß für $\varepsilon > 0$ und $y \in L$ die Menge $\{\alpha \in [\omega,\lambda_0[\ ;\ \|(P_{\alpha+1} - P_\alpha)(y)\| > \varepsilon\}$ endlich ist.

Denn, angenommen, es gibt eine streng monoton wachsende Folge $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset [\omega,\lambda_0[$ derart, daß für alle $i \in \mathbb{N}$ $\|(P_{\alpha_i+1} - P_{\alpha_i})(y)\| > \varepsilon$ ist, dann gilt für $\beta := \lim_{i\to\infty} \alpha_i$

und $$\gamma_k := \begin{cases} \alpha_i & \text{falls } k = 2i-1 \\ \alpha_i + 1 & \text{falls } k = 2i \end{cases}$$

$P_{\gamma_k}(y) \underset{k\to\infty}{\not\longrightarrow} P_\beta y$, was einen Widerspruch zu (iii) darstellt.

Da wir $\|(P_{\alpha+1} - P_\alpha)(y)\|_{\alpha+1} \leq \|(P_{\alpha+1} - P_\alpha)(y)\|$ $(\alpha \in [\omega,\lambda_0[)$ nach Voraussetzung haben, folgt:

$$\left(\frac{1}{M}\, d_\alpha(y)\right)_{\alpha\in[\omega,\lambda_0]} \in c_0([\omega,\lambda_0])$$

(7) Für $k,n \in \mathbb{N}$, $\xi \in \{0,1\}^n$ und $y \in L$ haben wir nach (5):

$$(4\,n\,k\,M)^{-2}\, G_{k,n,\xi}(y) \leq (n\,k)^{-1}\, \|y\| .$$

Ist nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so wähle man $k_0 \geq \left(\varepsilon^{-1}\|y\| + 1\right)$ und $n_0 \geq \left(\varepsilon^{-1}\|y\| + 1\right)$. Es folgt sofort:

$$\begin{aligned} &\operatorname{card}\left(\{(k,n,\xi)\ ;\ (4\,k\,n\,M)^{-2}\, G_{k,n,\xi}(y) \geq \varepsilon\}\right) \leq \\ &\operatorname{card}\left(\{k,n,\xi)\ ;\ (k\,n)^{-1}\, \|y\| \geq \varepsilon\}\right) \leq \\ &\operatorname{card}\left(\{k \in \mathbb{N}\ ;\ k \leq k_0\}\right) \cdot \operatorname{card}\left(\{(n,\xi)\ ;\ n \in \mathbb{N},\ n \leq n_0,\ \xi \in \{0,1\}^n\}\right) < \infty . \end{aligned}$$

Damit haben wir für $y \in L$: $(Qy(\delta))_{\delta\in\Delta} \in c_0(\Delta)$.

Für alle $y \in L$ ist

(8) $\|Qy\|_\infty = \|y\|$.

Dies folgt nach (2) - (5); dabei beachte man $M \geq 1$ aufgrund von (iv).

Definieren wir nun $|||\cdot||| : L \to \mathbb{R}$ durch $|||y||| := p \circ Q(y)$ $(y \in L)$, wobei p die Day-Norm auf $c_0(\Delta)$ darstellt, dann ist nach [46, S.705, Lemma 20.2] $|||\cdot|||$ eine Halbnorm auf L. Da für $y \in L$ mit (8) und (1.2.7.2.)

(9) $\frac{1}{2}\|y\| = \frac{1}{2}\|Qy\|_\infty \leq |||y||| \leq \|Qy\|_\infty = \|y\|$ gilt,

stellt $|||\cdot|||$ auch eine Norm dar.

Wir wollen nun zeigen, daß

(10) $|||\cdot|||$ $\sigma(Y,Z) \cap L$ - nach unten halbstetig ist.

Dazu beweisen wir

Für alle $\delta \in \Delta$ ist $Q_\delta : L \to \mathbb{R}_+$ $\sigma(Y,Z) \cap L$ - nach unten halbstetig.

<u>$\delta = 0$</u> : $Q_\delta = \|\cdot\|$ ist nach Voraussetzung $\sigma(Y,Z) \cap L$ - nach unten halbstetig.

<u>$\delta \in [\omega,\lambda_0]$</u> : Für $\delta = \alpha \in [\omega,\lambda_0]$ ist Q_δ als Komposition der $\sigma(Y,Z) \cap L$ - $\sigma(Y,Z) \cap R_\alpha(L)$ - stetigen Abbildung R_α mit der $\sigma(Y,Z) \cap R_\alpha(L)$ - nach unten halbstetigen Norm $\|\cdot\|_\omega$ (für $\alpha = \lambda_0$) bzw. $\|\cdot\|_{\alpha+1}$ $(\alpha \in [\omega,\lambda_0[)$ {vgl. (I) und (II)} ebenfalls $\sigma(Y,Z) \cap L$ - nach unten halbstetig.

<u>$\delta \in \mathbb{N}^2 \times \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{0,1\}^j$</u> : Ist $A \subset [\omega,\lambda_0]$ endlich, so ist $S_A(\cdot)$ als endliche Summe von $\sigma(Y,Z) \cap L$ - nach unten halbstetigen Abbildungen erneut $\sigma(Y,Z) \cap L$ - nach unten halbstetig (vgl. [27, S.89, Th. 7.22.]). Berücksichtigen

wir, daß für $\alpha \in [\omega,\lambda_0]$ R_α $\sigma(Y,Z) \cap L$ - $\sigma(Y,Z)$ - stetig und $\|\cdot\|$ nach Voraussetzung $\sigma(Y,Z)$ - nach unten halbstetig sind, so impliziert dies, daß für ein $n \in \mathbb{N}$ und $\xi \in \{0,1\}^n$ $T_{A,\xi}$ ebenfalls $\sigma(Y,Z) \cap L$ - nach unten halbstetig ist. Aus [27, S.89, Th. 7.22.] folgt somit für $k \in \mathbb{N}$: $G_{k,n,\xi}$ ist $\sigma(Y,Z) \cap L$ - nach unten halbstetig.

Dies ergibt zusammen mit (1.2.7.6.), daß $|||\cdot||| : L \to \mathbb{R}$ $\sigma(Y,Z) \cap L$ - nach unten halbstetig ist.

Im nächsten Teil wollen wir nachweisen, daß $|||\cdot|||$ eine lokal uniform konvexe Norm (bzw. $\sigma(Y,Z) \cap L$ - Kadec-Norm) auf L ist.
Will man zeigen, daß $|||\cdot|||$ eine lokal uniform konvexe Norm ist, so wähle man eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S(L,|||\cdot|||)$ und $y \in S(L,|||\cdot|||)$ mit $|||y_n + y||| \xrightarrow{n\to\infty} 2$.
Setzt man für $\alpha \in [\omega,\lambda_0]$ in Lemma (4.2.1.) $Y_1 := L$ $Y_2 := R_\alpha L$ und $T := \frac{1}{2M} R_\alpha$, so ergibt sich

(11) $\lim\limits_{n\to\infty} \|Qy_n - Qy\|_\infty = 0$,

(12) $\lim\limits_{n\to\infty} \|R_{\lambda_0}(y - y_n)\|_\omega = 0$ falls $\alpha = \lambda_0$ und

$\lim\limits_{n\to\infty} \|R_\alpha(y - y_n)\|_{\alpha+1} = 0$ falls $\alpha \in [\omega,\lambda_0[$

(denn $(R_{\lambda_0}L,\|\cdot\|_\omega) = (P_\omega L,\|\cdot\|_\omega)$,
$(R_\alpha L,\|\cdot\|_{\alpha+1}) = ((P_{\alpha+1} - P_\alpha)(L),\|\cdot\|_{\alpha+1})$ $(\alpha \in [\omega,\lambda_0[)$
sind als lokal uniform konvexe Räume vorausgesetzt).
Wenden wir uns dem Fall der $\sigma(Y,Z) \cap L$ - Kadec-Norm zu, so wählen wir ein Netz $(y_i)_{i\in I} \subset (S,|||\cdot|||)$, das in der $\sigma(Y,Z) \cap L$ - Topologie gegen ein

$y \in S(L, \|\|\cdot\|\|)$ konvergiert.

Wir setzen in Lemma (4.2.2.) für $\alpha \in [\omega,\lambda_0]$

$Y_1 := L$, $Z_1 := Z/L^\circ$, $Y_2 := R_\alpha(L)$, $Z_2 := Z/R_\alpha(L)^\circ$ und $T := \frac{1}{2M}R_\alpha$

Nach [31, S.163] ist $\sigma(Y,Z) \cap L = \sigma(Y_1,Z_1)$

und für $\alpha \in [\omega,\lambda_0]$ $\sigma(Y,Z) \cap R_\alpha(L) = \sigma(Y_2,Z_2)$.

Ferner ist $Z_i \subset Y_i'$ total auf Y , da $Z \subset Y'$ total ist $(i = 1,2)$.

Wenn man berücksichtigt, daß $\|\cdot\|_\omega$ bzw. $\|\cdot\|_{\alpha+1}$ als $\sigma(Y,Z) \cap R_{\lambda_0}(L)$ - bzw. $\sigma(Y,Z) \cap R_\alpha(L)$ - Kadec-Norm vorausgesetzt waren $(\alpha \in [\omega,\lambda_0[)$, erhält man mit Lemma (4.2.2.):

(11') $\|Qy_\iota - Qy\|_\infty \xrightarrow{\iota \in I} 0$

(12') $\lim\limits_{\iota \in I} \|R_{\lambda_0}(y_\iota - y)\|_\omega = 0 = \lim\limits_{\iota \in I} \|R_\alpha(y_\iota - y)\|_{\alpha+1}$ für $\alpha \in [\omega,\lambda_0[$.

Wir wollen im folgenden beide Fälle gleichzeitig behandeln.

Um zu zeigen, daß für $J \in \{\mathbb{N}, I\}$ $\lim\limits_{j \in J} \|y_j - y\| = 0$ (und damit $\lim\limits_{j \in J} |||y_\iota - y||| = 0$) gilt, geben wir uns ein $\varepsilon > 0$ vor, wobei o.E. $\varepsilon \leq 1$ ist.

Nach (1) gibt es eine endliche Menge $A \subset \Lambda(y)$, card $A = n$, $n \in \mathbb{N}$ derart, daß für $\bar{\xi} = (1,\ldots,1) \in \{0,1\}^n$ $T_{A,\bar{\xi}}(y) < \varepsilon/12$ gilt ($y \neq 0$, denn $|||y||| = 1$).

Nach (6) ist $\Lambda(y)$ abzählbar, und wir schreiben $\Lambda(y) = \{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\}$, wobei $d_{\alpha_j}(y) \geq d_{\alpha_{j+1}}(y)$ gelten solle.

Da wir $y \in S(L, \|\|\cdot\|\|)$ haben, gilt $\Lambda(y) \neq \emptyset$.

Es seien $m := \min\{i \in \mathbb{N};\ A \subset \{\alpha_1,\ldots,\alpha_i\}$ und $d_{\alpha_i} > d_{\alpha_{i+1}}\}$,

$B := \{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$ und $d := d_{\alpha_m} - d_{\alpha_{m+1}}$.

Wir schreiben $B = \{\beta_1,\ldots,\beta_m\}$, wobei $\beta_j < \beta_{j+1}$ für $j \in \{1,\ldots, m-1\}$,

und wählen $\xi \in \{0,1\}^m$ mit $\xi_i = 1$ falls $\beta_i \in A$ und $\xi_i = 0$ für $\beta_i \notin A$.

Dann gilt:

(13) $T_{B,\xi}(y) = T_{A,\xi}(y) < \varepsilon/12.$

Man wähle nun ein $k_0 \in \mathbb{N}$, $k_0 \geq \frac{4(m+1)\cdot M+1}{d}$, fest. Es gilt dann:

(14) $G_{k_0,m,\xi}(y) = T_{B,\xi}(y) + k_0\, S_B\, y$.

Denn für $C \subset [\omega,\lambda_0]$, card $C = m$, $C \neq B$, also $C \setminus B \neq \emptyset$, gilt:

$$T_{C,\xi}(y) + k_0\, S_C(y) \underset{(4)}{\leq} (2mM+1)\,\|y\| + k_0 \sum_{\alpha\in C} d_\alpha(y)$$

$$\underset{(9)}{\leq} (4mM+2)\,|||y||| + k_0\Big(\sum_{\alpha\in B\cap C} d_\alpha(y) + \sum_{\alpha\in C\setminus B} d_\alpha(y)\Big)$$

$$\leq 4M(m+1) + k_0\Big(\sum_{\alpha\in B\cap C} d_\alpha(y) + \sum_{\alpha\in B\setminus C} (d_\alpha(y) - d)\Big)$$

(dazu beachte man, daß card $B\setminus C$ = card $C\setminus B > 0$ gilt, denn card B = card C, und daß man für alle $\alpha \in B\setminus C$ und $\beta \in C\setminus B$ $d_\alpha \geq d_\beta + d$ hat).

$$\leq 4M(m+1) - \frac{4M(m+1)+1}{d}\, d + k_0\, S_B(y)$$

$$< T_{B,\xi}(y) + k_0\, S_B(y).$$

Somit haben wir für $C \subset [\omega,\lambda_0]$, card $C = m$, $C \neq B$:

$$T_{C,\xi}(y) + k_0\, S_C(y) < T_{B,\xi}(y) + k_0\, S_B(y)$$

$$\leq G_{k_0,m,\xi}(y),$$ und (14) ist gezeigt.

Nach (11) bzw. (11') gibt es ein $j_0 \in J$, so daß für alle $j \geq j_0$:

(15) $\|Qy_j - Qy\|_\infty < \frac{\varepsilon}{24(4Mmk_0)^2}$.

Es folgt für $j \geq j_0$:

(16) $|G_{k_0,m,\xi}(y) - G_{k_0,m,\xi}(y_j)| < \frac{\varepsilon}{24}$.

Nach (15) gilt für alle $\alpha \in [\omega,\lambda_0]$:

(17) $|d_\alpha(y_j) - d_\alpha(y)| < \frac{\varepsilon}{24\, k_0 m}$.

Für $j \geq j_0$ sei $C_j \subset [\omega,\lambda_0]$, card $C_j = m$, so daß

(18) $G_{k_0,m,\xi}(y_j) - \{T_{C_j,\xi}(y_j) + k_0\, S_{C_j}(y_j)\} < \frac{\varepsilon}{24}$.

Für $j \geq j_0$ ist $C_j = B$, denn angenommen für ein $j \geq j_0$ ist $C\setminus B_j \neq \emptyset$,

so folgt mit (14), (16) und (18):

$$|T_{B,\xi}(y) + k_0\, S_B(y) - k_0\, S_{C_j}(y_j) - T_{C_j,\xi}(y_j)| =$$

$$|G_{k_0,m,\xi}(y) - (T_{C_j,\xi}(y_j) + k_0\, S_{C_j}(y_j))| < \frac{\varepsilon}{12} .$$

Mit (17) hat man:

(19) $|T_{B,\xi}(y) + k_0(S_B(y) - S_{C_j}(y)) - T_{C_j,\xi}(y_j)| < \frac{\varepsilon}{6}$ und mit (13)

(20) $|k_0(S_B(y) - S_{C_j}(y)) - T_{C_j,\xi}(y_j)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Da $\operatorname{card} C_j \setminus B = \operatorname{card} B \setminus C_j > 0$ gilt, hat man mit (4)

$k_0(S_B(y) - S_{C_j}(y)) - T_{C_j,\xi}(y_j) \geq k_0\, d - 4M(m+1)|||y_j||| \geq 1$, was im Widerspruch zu (20) und $\varepsilon \leq 1$ ist.

Damit folgt $C_j = B$ für alle $j \geq j_0$ und nach (13) und (19) ergibt sich:

(21) $T_{B,\xi}(y_j) < \frac{\varepsilon}{3}$ für $j \geq j_0$.

Nach (12) bzw. (12') findet man ein $j_1 \geq j_0$, so daß für alle $j \geq j_1$ und alle $\alpha \in B$: $\|R_\alpha(y - y_j)\| < \frac{\varepsilon}{3m}$.

Dann gilt für $j \geq j_1$:

$$\|y - y_j\| \leq \|y - \sum_{i=1}^{m} \xi_i R_{\beta_i}(y)\| + \|\sum_{i=1}^{m} \xi_i R_{\beta_i}(y_j - y)\|$$

$$+ \|y_j - \sum_{i=1}^{m} \xi_i R_{\alpha_i}(y_j)\|$$

$$< T_{B,\xi}(y) + \frac{\varepsilon}{3} + T_{B,\xi}(y_j) \underset{(21)}{<} \varepsilon .$$

Damit ergibt sich: $\lim_{j \in J} \|y_j - y\| = \lim_{j \in J} |||y_j - y||| = 0.$

Falls nun $|||\cdot|||$ lokal uniform konvex ist, so fällt auf $S(L,|||\cdot|||)$ die $\sigma(Y,Z) \cap L$ - Topologie mit der $|||\cdot|||$ - Topologie zusammen, wenn man (1.2.7.7.) und (10) berücksichtigt.

Ist $|||\cdot|||$ eine $\sigma(Y,Z) \cap L$ - Kadec-Norm, so ergibt sich dies aufgrund der Definition. □

Ein zu dem vorangegangenen Satz ähnliches Ergebnis wurde von V. Zizler in [55] hergeleitet. Dort werden allerdings weder Teilräume noch die Einbeziehung lokalkonvexer Topologien berücksichtigt. Für unsere weitere Betrachtung ist deshalb dieses Resultat nicht explizit nutzbar.

Als erstes Ergebnis läßt sich eine Aussage über die ℓ_1-Summe von Banachräumen gewinnen.
Für eine abzählbare Summe findet sich der Satz, allerdings ohne Berücksichtigung lokalkonvexer Topologien, in [40]. Wir werden dieses Ergebnis auf beliebige ℓ_1-Summen übertragen. So zeigt das nachfolgende Lemma insbesondere, daß jeder AL-Raum (vgl. [43, S.112, Def. 8.1.] zur Definition) lokal uniform konvex renormierbar ist, wenn man den Darstellungssatz von Kakutani (vgl. [43, S.114, Th. 8.5.]) und die Darstellung beliebiger $L_1(\mu)$-Räume aus (2.1.2.) verwendet. Dabei beachte man, daß $L_1(\mu)$ für jedes endliche μ nach S. Troyanski [51, S.177, Th.1] lokal uniform konvex renormierbar ist.

<u>(4.2.4.) Lemma:</u> Es seien $(X_\iota, \|\cdot\|_\iota)_{\iota\in I}$ eine nichtleere Familie von normierten Räumen und für alle $\iota \in I$ $L_\iota \subset X_\iota$ ein linearer Teilraum und $\overline{Z}_\iota \subset X'_\iota$ ein auf X_ι totaler Teilraum derart, daß ein $K_\iota > 0$ und eine lokal uniform konvexe (bzw. $\sigma(X_\iota, \overline{Z}_\iota) \cap L_\iota$-Kadec-) Norm $\|\cdot\|_{1,\iota}$ auf L_ι existiert mit $K_\iota \|x_\iota\|_\iota \leq \|x_\iota\|_{1,\iota} \leq \|x\|_\iota$ $(x_\iota \in L_\iota)$.
Weiter seien $\|\cdot\|_\iota, \|\cdot\|_{1,\iota} \to \mathbb{R}$ $\sigma(X_\iota, \overline{Z}_\iota) \cap L$ -nach unten halbstetig $(\iota \in I)$.
Setzt man $Y := (\bigoplus_{\iota\in I} X_\iota)_{\ell_1(I)}$, $Z := (\bigoplus_{\iota\in I} \overline{Z}_\iota)_{\ell_\infty^c(I)}$ und $L := (\bigoplus_{\iota\in I} L_\iota)_{\ell_1(I)}$, dann gibt es auf L eine $\sigma(Y,Z) \cap L$ nach unten halbstetige lokal uniform konvexe Norm $\|\cdot\|_I$ (bzw. $\sigma(Y,Z) \cap L$ - Kadec-Norm $\|\cdot\|_I$) mit
$\frac{1}{2}\|x\|_{\ell_1(I)} \leq \|x\|_I \leq \|x\|_{\ell_1(I)}$ für $x \in L$,
und auf $S(L, \|\cdot\|_I)$ fallen die Norm und die $\sigma(Y,Z) \cap L$-Topologie zusammen.

<u>Beweis:</u> Wir wollen die Aussage durch Anwendung des Satzes (4.2.3.) beweisen. Es sei $\lambda_0 \geq \omega$ die erste Ordinalzahl der Kardinalität von I. Wir schreiben $I = \{\iota_\alpha ; \alpha < \lambda_0\}$ und definieren für eine Ordinalzahl $\beta \in [\omega, \lambda_0]$ $I_\beta := \{\iota_\alpha ; \alpha < \beta\}$.

Weiter sei für eine Ordinalzahl $\beta \in [\omega, \lambda_0]$

$$P_\beta : Y \to Y \qquad \text{mit}$$

$$(P_\beta x)_\iota := \begin{cases} x_\iota & \text{falls } \iota \in I_\beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt:

(1) Die Abbildung $J_\omega : P_\omega(Y) \to (\bigoplus_{\iota \in I_\omega} X_\iota)_{\ell_1(I_\omega)}$

$$(P_\omega x)_{\iota \in I} \to (\check{x}_\iota)_{\iota \in I_\omega}$$

ist eine Isometrie, die

$\sigma(Y,Z) \cap P_\omega(Y) - \sigma\big((\bigoplus_{\iota \in I_\omega} X_\iota)_{\ell_1(I_\omega)}, (\bigoplus_{\iota \in I_\omega} \overline{Z}_\iota)_{\ell_\infty(I_\omega)}\big)$ stetig ist.

<u>Denn:</u> J_ω ist aufgrund der Definition der Normen $\|\cdot\|_{\ell_1(I)}$ auf Y und $\|\cdot\|_{\ell_1(I_\omega)}$ auf $(\bigoplus_{\iota \in I_\omega} X)_{\ell_1(I_\omega)}$ eine Isometrie.

Ist nun $z := (z_\iota)_{\iota \in I_\omega} \in (\bigoplus_{\iota \in I_\omega} \overline{Z}_\iota)_{\ell_\infty(I_\omega)}$, so gilt für

$$z'_\iota := \begin{cases} z_\iota & \text{falls } \iota \in I_\omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad z' := (z'_\iota)_{\iota \in I} \in Z, \quad \text{und}$$

man erhält für $x \in Y$:

$$\langle P_\omega x, J^* z \rangle = \langle J(P_\omega x), z \rangle = \sum_{\iota \in I} \langle \check{x}_\iota, z_\iota \rangle$$

$$= \sum_{\iota \in I} \langle (P_\omega x)_\iota, z'_\iota \rangle = \langle P_\omega x, z' \rangle$$

Also gilt $J^*\big((\bigoplus_{\iota \in I_\omega} \overline{Z}_i)_{\ell_\infty(I_\omega)}\big) \subset Z$ und mit (1.2.2.) ist

$$J_\omega \; \sigma(Y,Z) \cap P_\omega(Y) - \sigma\big((\bigoplus_{\iota\in I_\omega} X_\iota)_{\ell_1(I_\omega)}, (\bigoplus_{\iota\in I_\omega} \overline{Z}_\iota)_{\ell_\infty(I_\omega)}\big) \text{ - stetig.}$$

Ähnlich hat man für $\lambda_0 > \omega$ und eine Ordinalzahl $\beta \in [\omega,\lambda_0[$:

(2) Die Abbildung

$$J_{\beta+1} : (P_{\beta+1} - P_\beta)(Y) \to X_{\iota_{\beta+1}}$$

$$\big((P_{\beta+1} - P_\beta)(x)\big)_\iota\big)_{\iota\in I} \to x_{\iota_{\beta+1}} \quad \text{ist eine Isometrie, die}$$

$$\sigma(Y,Z) \cap (P_{\alpha+1} - P_\alpha)(Y) - \sigma(X_{\iota_{\beta+1}}, \overline{Z}_{\iota_{\beta+1}}) \text{ - stetig ist.}$$

Da wir Satz (4.2.3.) anwenden wollen, weisen wir nach, daß die Familie $(P_\beta)_{\omega\leq\beta<\lambda}$ die Eigenschaften (i) - (iv) aus Satz (4.2.3.) erfüllt.

i) Für alle Ordinalzahlen $\omega \leq \beta < \lambda$ ist $\|P_\beta\| = 1$ und P_β ist $\sigma(Y,Z)$ - $\sigma(Y,Z)$ - stetig, was man sofort aus der Definition von P_β einsieht.

ii) Für Ordinalzahlen α,β , $\omega \leq \alpha \leq \beta \leq \lambda_0$, ist aus der Definition ebenfalls sofort ersichtlich, daß $P_\beta P_\alpha = P_\alpha P_\beta = P_\alpha$ gilt.

iii) Es sei $\beta \in]\omega,\lambda_0[$ eine Limesordinalzahl, dann gilt nach Definition $I_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} I_\alpha$ und es folgt

$$\lim_{\alpha<\beta} \|P_\beta x - P_\alpha x\|_{\ell_1(I)} = \lim_{\alpha<\beta} \sum_{\iota\in I_\beta \setminus I_\alpha} \|x_\iota\|_\iota = 0$$

aufgrund der Definition der Norm $\|\cdot\|_{\ell_1(I)}$.

iv) Ist $\lambda_0 > \omega$, also card $I > \aleph_0$, so hat man aufgrund der Definition von Y:

Für alle $x \in Y$ gibt es ein $\beta \in [\omega,\lambda_0[$ derart, daß für alle $\iota \in I \setminus I_\beta$ $x_\iota = 0$ gilt. Damit folgt $P_\beta x = x$.

Wir haben die Aussage des Lemmas bewiesen, wenn wir sie für card $I = \aleph_0$ nachweisen können. Denn ist card $I > \aleph_0$, und haben wir sie für card $I = \aleph_0$ gezeigt, so können wir mit (1),(2) und der Voraussetzung Satz (4.2.3.) anwenden.

Wir betrachten also nun den Fall $\operatorname{card} I = \aleph_0$. Dabei nehmen wir $I = \mathbb{N}$ o.E.d.A. an. Man setze für $i = 1,2$ $N_i := \mathbb{N}$ und definiere die Abbildung

$$Q : L \longrightarrow c_0(N_1 \uplus N_2)$$

$$(Qx)(n) := \begin{cases} \sum_{j=n}^{\infty} \|x_j\|_j & \text{für } n \in N_1 \\ \|x_n\|_{1,n} & \text{für } n \in N_2 \end{cases} .$$

Für alle $x \in L$ ist $(Qx(n))_{n \in N_1 \uplus N_2} \in c_0(N_1 \uplus N_2)$, denn dies ergibt sich aufgrund der Definition von L und der Voraussetzung $\|x_i\|_{1,i} \leq \|x_i\|_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Wir definieren $\|\cdot\|_{\mathbb{N}} : L \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto (p \circ Q)(x) \text{ , wobei}$$

p die Day-Norm auf $c_0(N_1 \uplus N_2)$ darstellt.

Die Abbildungen $L \ni x \longmapsto \sum_{j=n}^{\infty} \|x_j\|_j \quad (n \in N_1)$

und $L \ni x \longmapsto \|x_1\|_{1,n} \quad (n \in \mathbb{N})$ stellen auf L Halbnormen dar. Wir können also [46, S.705, Lemma 20.2] anwenden, um zu erkennen, daß auch $\|\cdot\|_{\mathbb{N}}$ auf L eine Halbnorm ist.

Für $x \in L$ haben wir

$$(3) \quad \tfrac{1}{2}\|x\|_{\ell_1} = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_i = \tfrac{1}{2}\|Q(x)\|_\infty \leq (p \circ Q)(x) =$$

$$= \|x\|_{\mathbb{N}} \leq \|Q(x)\|_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_j = \|x\|_{\ell_1} .$$

Damit ist $\|\cdot\|_{\mathbb{N}}$ eine zu $\|\cdot\|_{\ell_1}$ äquivalente Norm.

(4) Wir wollen nun zeigen, daß $\|\cdot\|_{\mathbb{N}}$ $\sigma(Y,Z) \cap L$ - nach unten halbstetig ist.

Für alle $j \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung

$Y \ni x \longmapsto x_j \in X_j$ $\sigma(Y,Z)$ - $\sigma(X_j,\overline{Z}_j)$ - stetig.

Da nach Voraussetzung für $j \in \mathbb{N}$ $\|\cdot\|_{1,j}, \|\cdot\|_j : L_j \to \mathbb{R}$ $\sigma(X_j,\overline{Z}_j) \cap L_j$ - nach unten halbstetig ist, ist somit für $m, j, k \in \mathbb{N}$ $L \ni x \longmapsto \|x_j\|_{1,j}$ und $L \ni x \longmapsto \sum_{i=k}^{m} \|x_i\|_i$ $\sigma(Y,Z) \cap L$ - nach unten halbstetig (vgl. dazu [27, S.89, Th. 7.22.]).

Mit [27, S.89, Th. 7.22. (iii)] ist also für $k \in \mathbb{N}$

$L \ni x \longmapsto \sum_{i=k}^{\infty} \|x_i\|_i$ $\sigma(Y,Z) \cap L$ - nach unten halbstetig.

Aus (1.2.7.6.) erhält man sofort (4).

(5) Es bleibt noch zu zeigen, daß $\|\cdot\|_{\mathbb{N}}$ eine lokal uniform konvexe Norm (bzw. $\sigma(Y,Z) \cap L$ - Kadec-Norm) ist.

Wir betrachten zunächst den Fall einer lokal uniform konvexen Norm.

Dazu seien $(x^m)_{m\in\mathbb{N}} \subset L$, $x \in L$ mit

$\|x^m\|_{\mathbb{N}} = \|x\|_{\mathbb{N}} = 1$ $(m \in \mathbb{N})$ und $\lim_{m\to\infty} \|x^m + x\|_{\mathbb{N}} = 2$.

Wenn wir in Lemma (4.2.1.) für $i \in \mathbb{N}$ $Y_1 := L$, $Y_2 := L_i$ und $T := P_i$ setzen, wobei $P_i : L \to L_i$ die Projektion auf die i-te Komponente sei, dann erhalten wir $((p \circ Q)(\cdot) = \|\cdot\|_{\mathbb{N}})$:

(6) $\lim_{m\to\infty} \|Qx^m - Qx\|_\infty = 0$,

(7) $\lim_{m\to\infty} \|x_i^m - x_i\|_{1,i} = \lim_{m\to\infty} \|x_i^m - x_i\|_i = 0$.

(man beachte, daß $(L_i, \|\cdot\|_{1,i})$ lokal uniform konvex ist).

Wenn wir zeigen wollen, daß $\|\cdot\|_{\mathbb{N}}$ eine $\sigma(Y,Z) \cap L$ - Kadec ist, falls für alle $i \in \mathbb{N}$ $\|\cdot\|_{1,i}$ auf L_i eine $(X_i,\overline{Z}_i) \cap L_i$-Kadec-Norm darstellt, sei $(x^\alpha)_{\alpha\in A}$ ein Netz in $S(L, |||\cdot|||_{\mathbb{N}})$, das in der $\sigma(Y,Z) \cap L$ - Topologie gegen ein $x \in S(L, |||\cdot|||_{\mathbb{N}})$ konvergiert.

Wir setzen in Lemma (4.2.2.) $Y_1 := L$, $Z_1 := Z/L^\circ$ und jeweils für $i \in \mathbb{N}$ $Y_2 := L_i$, $Z_2 := Z_i/L_i^\circ$, $T := P_i$, wobei $P_i : L \to L_i$ die Projektion auf die i-te Komponente ist. Nach [31, S.163] wissen wir,

daß $\sigma(Y_1,Z_1) = \sigma(Y,Z) \cap L$ und $\sigma(L_i, \overline{Z}_i/L_i^\circ) = \sigma(X_i,\overline{Z}_i) \cap L_i$ gilt ($i \in \mathbb{N}$). Weil für $i \in \mathbb{N}$ P_i $\sigma(Y,Z) \cap L - \sigma(X_i,\overline{Z}_i)$-stetig ist, können wir schließlich Lemma (4.2.2.) anwenden, und erhalten:

(8) $\lim\limits_{\alpha \in A} \|Qx^\alpha - Qx\|_\infty = 0$ und für $i \in \mathbb{N}$,

(9) $\lim\limits_{\alpha \in A} \|x_i^\alpha - x_i\|_{1,i} = \lim\limits_{\alpha \in A} \|x_i^\alpha - x_i\|_i = 0.$

Wir fassen nun beide Fälle zusammen und zeigen für

$R \in \{\mathbb{N}, A\}$ $\lim\limits_{r \in R} \|x^r - x\|_{\ell_1} = 0$ (und damit $\lim\limits_{r \in R} \|x^r - x\|_{\mathbb{N}} = 0$).

Zu diesem Zweck sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt dann ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{j=k}^{\infty} \|x_j\|_j < \varepsilon/3 .$$

Nach (6) bzw. (8) gibt es ein $r_0 \in \mathbb{N}$, so daß $(x^r)_{r \geq r_0}$ beschränkt ist. Ebenfalls mit (6) und (8) gibt es ein $r_1 \geq r_0$ derart, daß für alle $r \geq r_1$:

$$\sum_{j=k}^{\infty} \|x_j^r\|_j < \varepsilon/3 .$$

Weiter findet man nach (7) bzw. (9) ein $r_2 \geq r_1$, so daß für alle $1 \leq j < k$ und $r \geq r_2$:

$$\|x_j^r - x_j\|_j < \frac{\varepsilon}{3k} .$$

Zusammengesetzt erhält man für $r \geq r_2$:

$$\|x^r - x\|_{\ell_1} \leq \sum_{j=k}^{\infty} \|x_j^r\|_j + \sum_{j=k}^{\infty} \|x_j\|_j + \sum_{j=1}^{k-1} \|x_j^r - x_j\|_j < \varepsilon .$$

Damit ist $\|\cdot\|_{\mathbb{N}}$ eine $\sigma(Y,Z) \cap L$-nach unten halbstetige lokal uniform konvexe Norm bzw. $\sigma(Y,Z) \cap L$-Kadec-Norm) mit

$$\tfrac{1}{2}\|x\|_{\ell_1} \leq \|x\|_{\mathbb{N}} \leq \|x\|_{\ell_1} \quad \text{für } x \in L.$$

Schließlich bleibt noch zu erwähnen, daß nach (1.2.7.7.) auf $S(L,|||\cdot|||)$ die Norm- und die $\sigma(Y,Z) \cap L$-Topologie zusammenfallen, falls $\|\cdot\|_{\mathbb{N}}$ eine lokal uniform konvexe Norm ist. Für den Fall der Kadec-Norm ergibt sich dies sofort aus der Definition. □

Wie man unschwer erkennt, wird man dieses Lemma auf Lemma (4.1.2.) bzw. Lemma (2.1.2.) anwenden. Daher sieht man aber auch, daß wohl die wesentliche Arbeit, den Hauptsatz zu beweisen, darin besteht, die Aussage für einen Maßraum des Typs $(D_{\lambda_0}, Q_{\lambda_0}, \nu_{\lambda_0})$ nachzuweisen.

Wir haben alle Ergebnisse über die Renormierung in allgemeinen normierten Räumen zusammengetragen, die wir benötigen werden, und wenden uns in den nächsten Abschnitten ganz der Betrachtung von $L_1(\mu,X)$ und dem Beweis des Hauptsatzes (4.1.1.) zu.

(4.3.) Der Beweis des Satzes im Falle eines separablen Maßraumes (S,Σ,μ).

Wir kehren nun zum Beweis des Hauptsatzes zurück und betrachten zuerst einen separablen Maßraum (S,Σ,μ). Dazu beweisen wir folgende Aussage, deren Voraussetzung schwächer als jene im Hauptsatz ist.

(4.3.1.) Es seien (S,Σ,μ) ein separabler, endlicher und positiver Maßraum und $\mathfrak{g} = \{A_1, A_2, \ldots\} \subset \Sigma$ ein durchschnittsstabiles System mit den Eigenschaften, daß

(1) $\mathfrak{A}(\mathfrak{g}) \subset \Sigma$ dicht bezüglich $d\mu$ liegt, und für alle $\delta > 0$ die Menge $\{A \in \mathfrak{g} ; \mu(A) \geq \delta\}$ endlich ist.

Ist $L \subset L_1(\mu,X)$ ein Teilraum, so daß für alle $A \in \mathfrak{g}$ $I_A(L)$ eine äquivalente lokal uniform konvexe Norm (bzw. Kadec-Norm) besitzt, dann existiert auf L eine $\sigma' \cap L$ - nach unten halbstetige lokal uniform konvexe (bzw. $\sigma' \cap L$ - Kadec -) Norm $|||\cdot|||$ mit

$\frac{1}{2}\|f\|_1 \leq |||f||| \leq \|f\|_1$ für alle $f \in L$.

<u>Beweis von (4.3.1.):</u> Für $A \in \mathfrak{g}$ sei $\|\cdot\|_A : I_A(L) \to \mathbb{R}$ eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente lokal uniform konvexe Norm (bzw. Kadec-Norm) auf $I_A(L)$ mit $\|x\|_A \leq \|x\|$ für alle $x \in I_A(L)$ (man beachte, daß für $K > 0$ $K\cdot\|\cdot\|_\ell$ eine lokal uniform konvexe Norm bzw. Kadec-Norm ist, falls $\|\cdot\|_\ell$ eine lokal uniform konvexe Norm bzw. Kadec-Norm auf einem normierten Raum darstellt).

Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$ $\sigma_n := \sigma(A_1, \ldots, A_n)$ und sehen, daß

(2) $\mathfrak{A}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n$ bezüglich $d\mu$ (vgl. (1.3.1.7.)) dicht in Σ liegt.

Weiter definieren wir $\Delta := \{0\} \uplus \mathbb{N} \uplus \mathfrak{g}$ und bilden

$$Q : L \to c_0(\Delta)$$

$$Qf(\delta) := \begin{cases} \|f\|_1 & \text{falls } \delta = 0 \\ \frac{1}{2}\|f - \mathbb{E}_{\sigma_n} f\|_1 & \text{falls } \delta = n \in \mathbb{N} \\ \|I_A(f)\|_A & \text{falls } \delta = A \in \mathfrak{g} \end{cases}$$

In der Tat gilt $(Qf(\delta))_{\delta\in\Delta} \in c_0(\Delta)$, wenn man $\|f - \mathbb{E}_{\sigma_n} f\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (vgl. [14, S.125, Th. 1]) und (1) berücksichtigt.

Weiter bilden wir $|||\cdot||| : L \to \mathbb{R}$

$f \mapsto (p \circ Q)(f)$, wobei p die Day-Norm auf $c_0(\Delta)$ darstellt.

Für $f \in L$ gilt:

(3) $\frac{1}{2}|||f||| \leq \frac{1}{2}\|Qf\|_\infty \leq (p\circ Q)(f) \leq \|Qf\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Aufgrund von [46, S.702, Lemma 20.2.] bildet $|||\cdot|||$ eine zu $\|\cdot\|_1$ äquivalente Norm auf L (für alle $\delta \in \Delta$ ist Q_δ eine Halbnorm).

Wir wollen nun zeigen, daß für alle $\delta \in \Delta$ Q_δ $\sigma' \cap L$-nach unten halbstetig ist:

(4) $\underline{\delta = 0}$: Dies ergibt sich aufgrund der normierenden Eigenschaft von $L_\infty(\mu,X')$ (vgl. (1.3.4.1.) bzw. [27, S.89, Th.7.22.]).

(5) $\underline{\delta = n \in \mathbb{N}}$: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{E}_{\sigma_n}$ $\sigma' \cap L$ - σ' - stetig (vgl. (1.3.5.1.)), so daß Q_δ $\sigma' \cap L$ - nach unten halbstetig aufgrund der normierenden Eigenschaft von $L_\infty(\mu,X')$ und [27, S.89, Th. 7.22.] ist.

(6) $\underline{\delta = A \in \mathfrak{g}}$: Es seien $A \in \mathfrak{g}$ und $\iota : (I_A(L), \|\cdot\|_A)) \to (X,\|\cdot\|)$ die isomorphe Einbettung. Es gilt dann für ein $f \in L$, wenn man $B := \iota^{*-1}(B(I_A(L)'))$ setzt:

$$\|I_A(f)\|_A = \sup_{y' \in B(I_A(L)')} |\langle I_A(f), y'\rangle|$$

$$= \sup_{x' \in B} |\langle I_A(f), x'\rangle| = \sup_{x' \in B} |\langle f, x'\chi_A\rangle|$$

Damit ist Q_δ $\sigma' \cap L$ - nach unten halbstetig, wenn man [27, S.89, Th. 7.22.] berücksichtigt.

Bemühen wir nun (1.2.7.6.), so erhalten wir mit (4) - (6) insgesamt:

(7) $|||\cdot||| : L \to \mathbb{R}$ ist $\sigma' \cap L$ - nach unten halbstetig.

Wollen wir zeigen, daß $|||\cdot|||$ eine lokal uniform konvexe Norm auf L bildet, so wählen wir eine Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset S(L,|||\cdot|||)$ und ein $f \in S(L,|||\cdot|||)$ mit $\lim_{i\to\infty} |||f_i + f||| = 2$ aus.

Aus Lemma (4.2.1.) folgt dann (man wähle ein festes $A \in \mathfrak{g}$ und setze $y_2 := I_A(L)$ sowie $T := I_A$):

(8) $\lim_{i\to\infty} \|Qf_i - Qf\|_\infty = 0$.

Betrachten wir den Fall der Kadec-Norm, so sei $(f_j)_{j\in J} \subset S(L,|||\cdot|||)$ ein in der $\sigma' \cap L$ - Topologie gegen $f \in S(L,|||\cdot|||)$ konvergentes Netz. Wegen (4) - (6) können wir Lemma (4.2.2.) anwenden und erhalten

(8') $\lim_{j\in J} \|Qf_j - Qf\|_\infty = 0.$

(man setze in (4.2.2.) $Y_1 := L$ und $Y_2 := (I_A(L), \|\cdot\|_A)$, $T := I_A$ für ein $A \in \mathfrak{g}$ beliebig).

Wir behandeln nun den Fall der lokal uniform konvexen Norm bzw. Kadec-Norm simultan. Um zu zeigen, daß für $R \in \{\mathbb{N}, J\}$ $\lim_{r \in R} \|f_r - f\|_1 = 0$ (und mit (3) also $\lim_{r \in R} |||f_r - f||| = 0$) gilt, geben wir uns ein $\varepsilon > 0$ vor.

Es gibt ein $r_0 \in R$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß

(9) $\sup_{r \geq r_0} \|f_r - \mathbb{E}_{\sigma_{n_0}} f_r\|_1 \leq \varepsilon/3$.

Dies erhält man durch folgende Oberlegung:

Da $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (2) erfüllt, finden wir zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$

$$\|f - \mathbb{E}_{\sigma_n} f\|_1 < \varepsilon/6.$$

Nach (8) bzw. (8') existiert ein $r_0 \in R$, so daß für alle $r \geq r_0$:

$\|Qf_r - Qf\|_\infty < \varepsilon/6$. Damit gilt aber für alle $r \geq r_0$ $\|f_r - \mathbb{E}_{\sigma_{n_0}} f_r\|_1 < \varepsilon/3$.

Wir verwenden nun Lemma (4.2.1.) und Lemma (4.2.2.) sukzessive für jedes $A \in \mathfrak{g}$ in der folgenden Form an:

$$Y_1 := L \ , \ Y_2 := (I_A(L), \|\cdot\|_A) \text{ und } T := I_A.$$

Man beachte im Fall der lokal uniform konvexen Norm, daß aus (8) für $A \in \mathfrak{g}$ $\|I_A(f_r)\|_A \xrightarrow{r \in R} \|I_A(f)\|_A$ folgt. Da $\|\cdot\|_A$ eine lokal uniform konvexe Norm ist, erhält man aus Lemma (4.2.1.) für $A \in \mathfrak{g}$:

(10) $\lim_{r \in R} \|I_A(f_r - f)\|_A = \lim_{r \in R} \|I_A(f_r - f)\| = 0.$

Im Fall der Kadec-Norm ergibt sich (10) sofort aus Lemma (4.2.2.).

Da $\mathfrak{g}$ durchschnittsstabil ist, gilt (10) für jedes $A \in \sigma_{n_0}$, und es gibt $r_1 \geq r_0$ mit

(11) $\sup_{r \geq r_1} \|\mathbb{E}_{\sigma_{n_0}} f_r - \mathbb{E}_{\sigma_{n_0}} f\|_1 < \varepsilon/3$.

Verwenden wir nun (9) bzw. (11), so können wir für $r \geq r_1$ schließen:

$$\|f_r - f\|_1 \leq \|f - \mathbb{E}_{\sigma_{n_0}} f\|_1 + \|\mathbb{E}_{\sigma_{n_0}} f - \mathbb{E}_{\sigma_{n_0}} f_r\|_1 + \|\mathbb{E}_{\sigma_{n_0}} f_r - f_r\|_1 < \varepsilon.$$

Damit ist (4.3.1.) gezeigt. Jeder endliche, separable und positive Maßraum besitzt nach (1.3.1.11.) ein abzählbares durchschnittsstabiles System $\mathfrak{g} \subset \Sigma$, das (1) erfüllt. Der Hauptsatz ist im Falle eines separablen, endlichen und positiven Maßraums bewiesen. □

(4.4.) Der Beweis des Satzes im Falle des Maßraumes $(D_{\lambda_0}, Q_{\lambda_0}, \nu_{\lambda_0})$.

In diesem Abschnitt wollen wir die Restriktion, daß (S,Σ,μ) separabel ist, fallen lassen. Allerdings beschränkten wir uns in diesem Schritt auf den speziellen Maßraum $(D_{\lambda_0}, Q_{\lambda_0}, \nu_{\lambda_0})$, wie er in (1.3.7.1.) eingeführt wurde.

Bevor wir uns der Aussage des Satzes im Fall $(S,\Sigma,\mu) = (D_{\lambda_0}, Q_{\lambda_0}, \nu_{\lambda_0})$ stellen, führen wir noch einige Bezeichnungen ein.

Wir betrachten im folgenden eine feste Kardinalzahl $\mathfrak{m} > \aleph_0$, und λ_0 sei die erste Ordinalzahl der Kardinalität $\mathfrak{m}$.

Ist $\Gamma \subset [0,\lambda_0[$ eine unendliche Teilmenge, so setze man $\Sigma(\Gamma) := pr_\Gamma^{-1}(Q_\Gamma)$, wobei $pr_\Gamma := D_{\lambda_0} \to D_\Gamma$ die meßbare Projektion auf die Komponenten von Γ darstellt.

Mit Q_Γ ist auch $\Sigma(\Gamma)$ eine σ-Algebra. Für $\Gamma \subsetneq [0,\lambda_0[$, $\aleph_0 \leq \operatorname{card} \Gamma$, und $\alpha \in [0,\lambda_0[\setminus \Gamma$ läßt sich $\Sigma(\Gamma \cup \{\alpha\})$ in einer äquivalenten Form darstellen:

Setzt man nämlich für eine Ordinalzahl $\beta < \lambda_0$

$A_i^\beta := \prod_{\gamma<\lambda_0} B_\gamma$, wobei $B_\gamma = \{0,1\}$ für $\gamma \neq \beta$ und $B_\gamma = \{i\}$ für $\gamma = \beta$ $(i = 0,1)$ und

$\Sigma'(\Gamma \cup \{\alpha\}) := \{(A_0^\alpha \cap A) \cup (A_1^\alpha \cap B) ; A,B \in \Sigma(\Gamma)\}$, so hat man

(1) $\Sigma'(\Gamma \cup \{\alpha\}) = \Sigma(\Gamma \cup \{\alpha\})$ denn es gilt:

- $\Sigma'(\Gamma \cup \{\alpha\}) \subset \Sigma(\Gamma \cup \{\alpha\})$: $A_i^\alpha \in \Sigma_{\Gamma \cup \{\alpha\}}$ $(i = 0,1)$ aufgrund der

$Q_{\Gamma \cup \{\alpha\}}$ - Pot($\{0,1\}$) - Meßbarkeit der Projektion $pr_\alpha : D_{\Gamma \cup \{\alpha\}} \to \{0,1\}$ und $\Sigma(\Gamma) \subset \Sigma(\Gamma \cup \{\alpha\})$; da $pr_\Gamma : D_{\Gamma \cup \{\alpha\}} \to D_\Gamma$ $Q_{\Gamma \cup \{\alpha\}} - Q_\Gamma$ - meßbar ist.

- Andererseits ist für alle $\gamma \in \Gamma$, $A_i^\gamma \in \Sigma(\Gamma)$ $(i = 0,1)$, so daß für $\gamma \in \Gamma \cup \{\alpha\}$ $A_i^\gamma \in \Sigma'(\Gamma \cup \{\alpha\})$ $(i = 0,1)$. Aus der Definition folgt, daß $\Sigma'(\Gamma \cup \{\alpha\})$ eine σ-Algebra ist. Nach Definition der Produkt-σ-Algebra $Q_{\Gamma \cup \{\alpha\}}$ hat man $\Sigma(\Gamma \cup \{\alpha\}) = \sigma(A_i^\gamma ; \gamma \in \Gamma \cup \{\alpha\}, i = 0,1)$.

Man erhält also $\Sigma(\Gamma \cup \{\alpha\}) = \Sigma'(\Gamma \cup \{\alpha\})$.

(2) Für eine unendliche Teilmenge $\Gamma \subset [0,\lambda_0[$ betrachten wir

$$\mathfrak{g}(\Gamma) := \{\emptyset\} \cup \left\{ \bigcap_{k=1}^{m} A_{p_k}^{\beta_k} ; p_k \in \{0,1\}, \beta_k \in \Gamma, \beta_j \neq \beta_k \text{ für } j \neq k, j,k \in \{1,\dots,m\}, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Aufgrund der Definition von $\Sigma(\Gamma)$ sehen wir $\Sigma(\Gamma) = \sigma(\mathfrak{g}(\Gamma))$.

$\mathfrak{A}(\mathfrak{g}(\Gamma))$ ist nach [16, S.134 III 5.5 und 136 III 5.8] bezüglich der Metrik $d\nu_{\lambda_0}$ aus (1.3.1.8.) dicht in $\Sigma(\Gamma)$.

Das folgende Lemma wird den Beweis des Satzes im Falle des Maßraumes $(D_{\lambda_0}, Q_{\lambda_0}, \nu_{\lambda_0})$ auf ein algebraisches Problem reduzieren.

<u>(4.4.1.) Lemma:</u> Es seien $\Gamma \subset [0,\lambda_0[$ eine unendliche Menge und $L \subset L_1(\Sigma(\Gamma),X)$ ein Teilraum mit den Eigenschaften:

I*) Für alle $A \in \mathfrak{g}(\Gamma)$ besitzt $I_A(L)$ eine äquivalente lokal uniform konvexe Norm (bzw. Kadec-Norm).

II*) Sind $\Gamma_1,\dots,\Gamma_n \subsetneq \Gamma$, $\aleph_0 \leq \operatorname{card} \Gamma_i$, $\alpha_i \in \Gamma \setminus \Gamma_i$ $(i = 1,\dots,n)$ mit $(\Gamma_i \cup \{\alpha_i\}) \subset (\Gamma_{i+1} \cup \{\alpha_{i+1}\})$ $(i = 1,\dots,n-1)$ und $A \in \mathfrak{g}(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})$ so besitzt

$I_A((\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1\cup\{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)}) \dots (\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n\cup\{\alpha_n\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n)})(L))$ eine äquivalente lokal uniform konvexe Norm (bzw. Kadec-Norm).

Dann existiert auf L eine $\sigma' \cap L$ - nach unten halbstetige äquivalente lokal uniform konvexe Norm (bzw. $\sigma' \cap L$ - Kadec-Norm) $|||\cdot|||$ mit

$\frac{1}{2}\|f\|_1 \leq |||f||| \leq \|f\|_1$ für alle $f \in L$.

<u>Beweis:</u> Wir führen den Beweis durch transfinite Induktion nach der Kardinalzahl von Γ.

<u>Induktionsanfang: card $\Gamma = \aleph_0$:</u> Wir schreiben $\Gamma = \{\beta_1, \beta_2, \dots\}$ und definieren:

$$\tilde{\mathfrak{g}}(\Gamma) := \left\{ \bigcap_{k=1}^{m} A_{p_k}^{\beta_k} ; p_k \in \{0,1\}, k \in \{1,\dots,m\}, m \in \mathbb{N} \right\} \cup \{\emptyset\} \quad (\subset \mathfrak{g}(\Gamma))$$

Wie aus der Definition zu ersehen ist, gilt aufgrund der Eigenschaft des Produktmaßes:

Für alle $\delta > 0$ ist die Menge $\{A \in \tilde{\mathfrak{g}}(\Gamma) ; \nu_{\lambda_0}(A) \geq \delta\}$ endlich.

Man sieht auch sofort ein, daß $\tilde{\mathfrak{g}}(\Gamma)$ durchschnittsstabil ist.

Für $m \in \mathbb{N}$ ist $\bigcup_{(p_1,\dots,p_m) \in \{0,1\}^m} \left(\bigcap_{k=1}^{m} A_{p_k}^{\beta_k} \right) = D_{\lambda_0}$.

Deshalb hat man für $p \in \{0,1\}$ und $m \in \mathbb{N}$

$$A_p^{\beta_{m+1}} = A_p^{\beta_{m+1}} \cap \left(\bigcup_{(p_1\dots p_n) \in \{0,1\}^m} \left(\bigcap_{k=1}^{m} A_{p_k}^{\beta_k} \right) \right)$$

$$= \bigcup_{(p_1\dots p_n) \in \{0,1\}^n} \left(\bigcap_{k=1}^{m} A_{p_k}^{\beta_k} \cap A_p^{\beta_{m+1}} \right)$$

Also gilt für alle $p \in \{0,1\}$ und $m \in \mathbb{N}$ $A_p^{\beta_m} \in \mathfrak{A}(\tilde{\mathfrak{g}}(\Gamma))$. Damit haben wir $\mathfrak{A}(\tilde{\mathfrak{g}}(\Gamma)) = \mathfrak{A}(\mathfrak{g}(\Gamma))$ und mit (2) ist $\mathfrak{A}(\tilde{\mathfrak{g}}(\Gamma))$ dicht in $\Sigma(\Gamma)$ bezüglich der Metrik $d\nu_{\lambda_0}$.

Wir setzen in (4.3.1.) $\mathfrak{g} := \tilde{\mathfrak{g}}(\Gamma)$, und $\mathfrak{g}$ erfüllt nach diesen Vorüberlegungen die Voraussetzungen, die an $\mathfrak{g}$ in (4.3.1.) gesetzt sind.

Mit (4.3.1.) und I*) ist die Behauptung für $\operatorname{card}\Gamma = \aleph_0$ richtig.

Induktionsannahme: Die Aussage sei für alle unendlichen Teilmengen

$\Gamma' \subset [0,\lambda_0[$ mit $\operatorname{card}\Gamma' < \operatorname{card}\Gamma$ und alle Teilräume

$L \subset L_1(\Sigma(\Gamma'),X)$, die I*) und II*) entsprechend erfüllen, richtig.

Induktionsschluß: Es seien λ_Γ die erste Ordinalzahl mit

$\operatorname{card}\Gamma = \operatorname{card}\lambda_\Gamma$ und $L \subset L_1(\Sigma(\Gamma),X)$ ein Teilraum, der I*) und II*)

genügt. Es gibt dann eine bijektive Abbildung $j : \Gamma \longrightarrow [0,\lambda_\Gamma[$.

Ist α eine Ordinalzahl, $\omega \leq \alpha \leq \lambda_\Gamma$, so definiere man

$\Gamma_\alpha := j^{-1}([0,\alpha[)$.

Aufgrund der Bijektion j gilt für Ordinalzahlen α,β , $\omega \leq \alpha \leq \beta \leq \lambda_\Gamma$

$\Sigma(\Gamma_\alpha) \subset \Sigma(\Gamma_\beta)$.

Ferner hat man für eine Limeszahl β , $\omega \leq \beta \leq \lambda_\Gamma$

$$\Sigma(\Gamma_\beta) = \sigma\Big(\bigcup_{\alpha<\beta} \Sigma(\Gamma_\alpha)\Big) .$$

Denn:

"$\supset$" : Diese Inklusion ist klar.

"$\subset$" : Aus der Definition von

$\Sigma(\Gamma_\beta) = \Sigma(pr^{-1}([0,\beta[)) = pr^{-1}_{j^{-1}([0,\beta[)}(Q_{j^{-1}([0,\beta[)})$ ergibt sich

$\Sigma(\Gamma_\beta) = \sigma\{A^\tau_p ; \tau \in j^{-1}([0,\beta[) , p \in \{0,1\}\}$

{man beachte dabei die Definition der Produkt σ-Algebra $Q_{j^{-1}([0,\beta[)}$

auf $D_{j^{-1}([0,\beta[)}$} .

Für $\tau \in j^{-1}([0,\beta[)$ gibt es ein $\gamma \in [0,\beta[$ mit $j(\tau) = \gamma$.

Somit ist für $p \in \{0,1\}$ $A^\tau_p \in \Sigma(\Gamma_{\gamma+1}) \subset \sigma\Big(\bigcup_{\alpha<\beta}\Sigma(\Gamma_\alpha)\Big)$ und man hat

$\Sigma(\Gamma_\beta) \subset \sigma\Big(\bigcup_{\alpha<\beta} \Sigma(\Gamma_\alpha)\Big)$.

Für eine Ordinalzahl α , $\omega \leq \alpha < \lambda_\Gamma$, setzen wir $\mathbb{E}_\alpha := \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_\alpha)}$

Da wir Satz (4.2.3.) anwenden wollen, müssen wir nachprüfen, ob die "lange Folge" $(\mathbb{E}_\alpha)_{\omega\leq\alpha<\lambda_\Gamma}$ die Eigenschaften i) - iv) aus Satz (4.2.3.) erfüllt, wenn man $Y := L_1(\Sigma(\Gamma),X)$ setzt.

- Für alle Ordinalzahlen α , $\omega \leq \alpha < \lambda_\Gamma$, gilt:

  $\|\mathbb{E}_\alpha\| \leq 1$ und $\mathbb{E}_\alpha$ ist σ'-σ'-stetig (vgl. (1.3.5.1.)).
- Da man für Ordinalzahlen α,β , $\omega \leq \alpha \leq \beta < \lambda_\Gamma$, $\Sigma(\Gamma_\alpha) \subset \Sigma(\Gamma_\beta)$ hat, ist $\mathbb{E}_\alpha\mathbb{E}_\beta = \mathbb{E}_\beta\mathbb{E}_\alpha = \mathbb{E}_\alpha$.
- Für eine Limeszahl β , $\omega < \beta < \lambda_\Gamma$, gilt $\Sigma(\Gamma_\beta) = \sigma\left(\bigcup_{\alpha<\beta}\Sigma(\Gamma_\alpha)\right)$, so daß mit dem Martingalkonvergenzsatz ([14, S.125, Th.1]) für $f \in L_1(\Sigma(\Gamma),X)$ $\lim_{\alpha<\beta} \mathbb{E}_\alpha f = \mathbb{E}_\beta f$ in $(L_1(\Sigma(\Gamma),X),\|\cdot\|_1)$ folgt.
- Es ist $\Sigma(\Gamma) = \sigma\left(\bigcup_{\alpha<\lambda_\Gamma}\Sigma(\Gamma_\alpha)\right)$, also gibt es, da $\operatorname{card}\Gamma > \aleph_0$, für alle $f \in L_1(\Sigma(\Gamma),X)$ eine Ordinalzahl α , $\omega \leq \alpha < \lambda_\Gamma$, mit $\mathbb{E}_\alpha f = f$ (vgl. (1.3.5.3.)).

Als nächstes zeigen wir, daß $\mathbb{E}_\omega(L)$ und $(\mathbb{E}_{\alpha+1} - \mathbb{E}_\alpha)(L)$ für jede Ordinalzahl α , $\omega \leq \alpha < \lambda_\Gamma$ den Bedingungen I*) und II*) genügt. Damit sind wir fertig, denn $\operatorname{card}\omega = \aleph_0 < \operatorname{card}\Gamma$ und $\operatorname{card}\alpha < \operatorname{card}\Gamma$ für jede Ordinalzahl α , $\omega \leq \alpha < \lambda_\Gamma$. Wir können dann die Induktionsannahme anwenden und schließlich Satz (4.2.3.) benützen, um zu erkennen, daß L eine äquivalente $\sigma' \cap L$ - nach unten halbstetige lokal uniform konvexe (bzw. $\sigma' \cap L$ - Kadec-) Norm besitzt.

Wir prüfen zuerst I*) nach:

- Für alle $A \in \mathfrak{g}(\Gamma_\omega)$ gilt $I_A(\mathbb{E}_\omega(L)) = I_A(L)$. Weil $\mathfrak{g}(\Gamma_\omega) \subset \mathfrak{g}(\Gamma)$ gilt und L I*) erfüllt, genügt $\mathbb{E}_\omega(L)$ auch I*).
- Ist α eine Ordinalzahl, $\omega \leq \alpha < \lambda_\Gamma$ und ist $A \in \mathfrak{g}(\Gamma_{\alpha+1}) \subset \mathfrak{g}(\Gamma)$ so setze man in der Voraussetzung II*) für L :

$\Gamma_1 := j^{-1}([0,\alpha[)$, $\alpha_1 := j^{-1}(\{\alpha\})$ und erhält mit II*):

$I_A((\mathbb{E}_{\alpha+1} - \mathbb{E}_\alpha)(L)) = I_A((\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)})(L))$ besitzt eine äquivalente lokal uniform konvexe Norm (bzw. Kadec-Norm).

Wir betrachten nun II*):

- Es seien $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n \subsetneq j^{-1}([0,\omega[)$, $\alpha_i \in j^{-1}([0,\omega[) \setminus \Gamma_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ mit $(\Gamma_i \cup \{\alpha_i\}) \subset (\Gamma_{i+1} \cup \{\alpha_{i+1}\})$, so gilt für $A \in \mathfrak{g}(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\}) \subset \mathfrak{g}(\Gamma_\omega)$:

$$I_A((\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)})\ldots(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n \cup \{\alpha_n\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n)})(\mathbb{E}_\omega(L))) =$$

$$I_A((\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)})\ldots(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n \cup \{\alpha_n\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n)})(L))$$

und II*) ist für $\mathbb{E}_\omega(L)$ erfüllt, da L II*) genügt.

- Ähnliches gilt für eine Ordinalzahl α , $\omega \leq \alpha < \lambda$ und $(\mathbb{E}_{\alpha+1} - \mathbb{E}_\alpha)(L)$.

Es seien $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n \subsetneq j^{-1}([0,\alpha+1[)$, $\aleph_0 \leq \operatorname{card} \Gamma_i$,

$\alpha_i \in j^{-1}([0,\alpha+1) \setminus \Gamma_i$ $(i = 1,\ldots,n)$,$(\Gamma_i \cup \{\alpha_i\}) \subset (\Gamma_{i+1} \cup \{\alpha_{i+1}\})$

$(i = 1,\ldots, n-1)$.

Für $A \in \mathfrak{g}(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\}) \subset \mathfrak{g}(j^{-1}([0,\alpha+1[)) \subset \mathfrak{g}(\Gamma)$ hat man

$$I_A((\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)})\ldots(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n \cup \{\alpha_n\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n)})(\mathbb{E}_{\alpha+1} - \mathbb{E}_\alpha)(L)) =$$

$$I_A((\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_n\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)})\ldots(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_{n+1} \cup \{\alpha_{n+1}\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_{n+1})})(L)) ,$$

wobei $\Gamma_{n+1} := j^{-1}([0,\alpha[)$ und $\alpha_{n+1} := j^{-1}(\{\alpha\})$ gesetzt sind.

Es ist $\alpha_{n+1} \in \Gamma \setminus \Gamma_{n+1}$. Ferner gilt

$$\Gamma_n \subsetneq j^{-1}([0,\alpha+1[) = j^{-1}([0,\alpha[) \cup j^{-1}(\{\alpha\}) = \Gamma_{n+1} \cup \{\alpha_{n+1}\}$$

und $\alpha_n \in j^{-1}([0,\alpha+1[) = \Gamma_{n+1} \cup \{\alpha_{n+1}\}$

Deshalb erfüllen die Mengen $\{\Gamma_1,\ldots,\Gamma_{n+1}\}$ und $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}\}$ die Voraussetzungen II*) für L .

Also ist II*) auch für $(\mathbb{E}_{\alpha+1} - \mathbb{E}_\alpha)(L)$ erfüllt, denn L genügt II*).

Der Beweis des Lemmas ist damit abgeschlossen. □

Wir kehren zu dem Beweis des Hauptsatzes zurück.

Wenn man in Lemma (4.4.1.) $\Gamma := [0,\lambda_0[$ setzt und zeigt, daß ein Teilraum $L \subset L_1(D_{\lambda_0},X)$, der den Voraussetzungen des Satzes genügt, auch die Bedingungen I*), II*) des Lemmas erfüllt, sind wir fertig.

Setzt man im Hauptsatz $B := \emptyset$, so erhält man aus der Voraussetzung des Satzes sofort die Bedingung I*).

Die Hauptarbeit liegt in der Verifikation von II*).

Dazu genügt es das folgende algebraische Problem zu lösen:

(*) Es seien $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n \subsetneq [0,\lambda_0[$, $\aleph_0 \leq \operatorname{card}\Gamma_i$, $\alpha_i \in [0,\lambda_0[\setminus\Gamma_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ mit $(\Gamma_i \cup \{\alpha_i\}) \subset (\Gamma_{i+1} \cup \{\alpha_{i+1}\})$ $(i = 1,\ldots,n-1)$,

$A = \bigcap_{k=1}^{m} A_{p_k}^{\beta_k} \in \mathfrak{A}(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})$, $p_k \in \{0,1\}$, $\beta_k \in \Gamma_1 \cup \{\alpha_1\}$,

$k \in \{1,\ldots,m\}$, $m \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $C,D \in Q_{\lambda_0}$, $C \cap D = \emptyset$ und ein $K \geq 0$ derart, daß für alle $f \in L_1(D_{\lambda_0},X)$:

$$I_A\{(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)})\ldots(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n \cup \{\alpha_n\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n)})(f)\} = K(I_C - I_D)(f)$$

Wir werden den Beweis hierzu durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ führen. Allerdings bedarf es dazu noch zweier vorbereitender Lemmata.

<u>(4.4.2.) Lemma:</u> Für eine unendliche Teilmenge $\Gamma \subsetneq [0,\lambda_0[$, $\alpha \in [0,\lambda_0[\setminus\Gamma$, $f \in L_1(D_{\lambda_0},X)$, $E \in \Sigma(\Gamma)$ und $p \in \{0,1\}$ gilt:

$$I_{A_p^\alpha \cap E}\{(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma \cup \{\alpha\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma)})(f)\} = \tfrac{1}{2}(I_{A_p^\alpha \cap E} - I_{A_q^\alpha \cap E})(f) \quad (q \in \{0,1\}, p \neq q).$$

<u>Beweis:</u> Da die Elementarfunktionen $\mathcal{E}(D_{\lambda_0},\Sigma(\Gamma\cup\{\alpha\}),\nu_{\lambda_0},X)$ dicht in $L_1(\Sigma(\Gamma\cup\{\alpha\}),X)$ liegen, genügt es die Aussage für die Funktionen vom Typ

$f = \sum_{k=1}^{n} x_k^p \chi_{A_p^\alpha \cap B_k} + \sum_{k=1}^{n} x_k^q \chi_{A_q^\alpha \cap B_k}$ nachzuweisen. $\big(x_k^p\,,\ x_k^q \in X\ ,\ B_k \in \Sigma(\Gamma)$, $B_j \cap B_k = \emptyset$ für $j \neq k$, $j,k \in \{1,\dots,n\}$, $n \in \mathbb{N}$; man beachte die Darstellung der σ-Algebra $\Sigma(\Gamma\cup\{\alpha\})$ nach (1)$\big)$.

$$\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma)}(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^p\,\nu_{\lambda_0}(A_p^\alpha \cap B_k) + x_k^q\,\nu_{\lambda_0}(A_q^\alpha \cap B_k)}{\nu_{\lambda_0}(B_k)}\,\chi_{B_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}(x_k^p + x_k^q)\,\chi_{B_k}$$

(dabei beachte man, daß für $k \in \{1,\dots, m\}$ aufgrund der Definition des Produktmaßes $\nu_{\lambda_0}(A_p^\alpha \cap B_k) = \nu_{\lambda_0}(A_q^\alpha \cap B_k) = \frac{1}{2}\,\nu_{\lambda_0}(B_k)$ gilt).

Somit folgt:

$$I_{A_p^\alpha \cap E}(f - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma)} f) = \sum_{k=1}^{n} x_k^p\,\nu_{\lambda_0}(A_p^\alpha \cap B_k \cap E) - \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k^p + x_k^q)\nu_{\lambda_0}(A_p^\alpha \cap B_k \cap E)$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\,\nu_{\lambda_0}(A_p^\alpha \cap B_k \cap E) - \sum_{k=1}^{n} x_k^q\,\nu_{\lambda_0}(A_p^\alpha \cap B_k \cap E)\Big)$$

$$= \tfrac{1}{2}(I_{A_p^\alpha \cap E} - I_{A_q^\alpha \cap E})(f),$$

denn $\nu_{\lambda_0}(A_p^\alpha \cap B_k \cap E) = \nu_{\lambda_0}(A_q^\alpha \cap B_k \cap E)$ für $k \in \{1,\dots,n\}$.
Damit ist Lemma (4.4.2.) für $f \in L_1(\Sigma(\Gamma\cup\{\alpha\}),X)$ und wegen $A_p^\alpha \cap E \in \Sigma(\Gamma\cup\{\alpha\})$ auch für $f \in L_1(D_{\lambda_0},X)$ gezeigt. □

Im nachfolgenden Lemma betrachten wir die Situation, daß die Elemente der Menge $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ in (*) paarweise verschieden sind.

<u>(4.4.3.) Lemma:</u> Es seien $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n \subsetneq [0,\lambda_0[$, $\aleph_0 \leq \operatorname{card}\Gamma_i$, $\alpha_i \in [0,\lambda_0[\setminus\Gamma_i$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$, $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, $\Gamma_i \cup \{\alpha_i\} \subset \Gamma_{i+1} \cup \{\alpha_{i+1}\}$ $(i \in \{1,\ldots, n-1\})$ und $A \in \mathfrak{B}(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})$, $A = \bigcap_{k=1}^{m} A_{p_k}^{\beta_k}$, $p_k \in \{0,1\}$, $\beta_k \in \Gamma_1 \cup \{\alpha_1\}$ $(k \in \{1,\ldots, m\})$. Dann gilt:

(a) Ist $f \in L_1(D_{\lambda_0},X)$, und gibt es ein $i \in \{1,\ldots,n\}$ derart, daß $\alpha_i \notin \{\beta_1,\ldots, \beta_m\}$, so folgt:

$$I_A\big((\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1\cup\{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)})\ldots(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n\cup\{\alpha_n\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n)})(f)\big) = 0.$$

(b) Ist $\alpha_k = \beta_k$ für alle $k \in \{1,\ldots,n\}$, so gibt es für alle $i \in \{1,\ldots, n-1\}$

$$C,D \in \Sigma\big((\Gamma_n \cup \{\alpha_n\}) \setminus (\bigcup_{k=n+1}^{m} \{\beta_k\} \cup \{\alpha_i\})\big) \quad C \cap D = \emptyset$$

$(\bigcup_{k=n+1}^{m} \{\beta_k\} := \emptyset$ für $n = m)$ derart, daß für $\overline{A} := \bigcap_{k=n+1}^{m} A_{p_k}^{\beta_k}$

$(\overline{A} := D_{\lambda_0}$ für $n = m)$ und alle $f \in L_1(D_{\lambda_0},X)$ folgt:

$$I_A\big((\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1\cup\{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)})\ldots(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n\cup\{\alpha_n\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n)})(f)\big) =$$

$$2^{-n}\big(I_{\overline{A}\cap((A_{p_i}^{\alpha_i}\cap C)\cup(A_{q_i}^{\alpha_i}\cap D))} - I_{\overline{A}\cap((A_{p_i}^{\alpha_i}\cap D)\cup(A_{q_i}^{\alpha_i}\cap C))}\big)(f) ,$$

(dabei ist $q_i \in \{0,1\}$, $p_i \neq q_i$).

<u>Beweis:</u> Man setze für $j \in \{1,\ldots,n\}$ und $f \in L_1(D_{\lambda_0},X)$:

$$f_j := (\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_j\cup\{\alpha_j\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_j)})\ldots(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n\cup\{\alpha_n\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n)})(f) ,$$

$$f_{n+1} := f .$$

a) Es sei $i_0 := \min\{i \in \{1,\dots,n\} \; ; \; \alpha_i \notin \{\beta_1,\dots,\beta_m\}\}$.

1. Fall: $i_0 = 1$: Dann ist $\{\beta_1,\dots,\beta_m\} \subset (\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\}) \setminus \{\alpha_1\} \underset{\alpha_1 \notin \Gamma_1}{=} \Gamma_1$

und damit $A \in \Sigma(\Gamma_1)$. Deshalb gilt:

$I_A\big(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})}(f_2)\big) = I_A\big(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)}(f_2)\big)$, d.h.

$I_A\big((\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)}) \dots (\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n \cup \{\alpha_n\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n)})(f)\big) = 0$

2. Fall: $i_0 \geq 1$: Wir nehmen o.E. $\alpha_1 = \beta_1$ an und wollen Lemma (4.4.2.) anwenden. Falls $m \geq 2$ ist, so gilt

$\{\beta_2,\dots,\beta_m\} \subset (\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\}) \setminus \{\beta_1\} \underset{\alpha_1 = \beta_1}{=} \Gamma_1$.

Damit ist $E := \bigcap_{k=2}^{m} A_{p_k}^{\beta_k} \in \Sigma(\Gamma_1)$. Hat man $m = 1$, dann setze man $E := D_{\lambda_0}$. Lemma (4.4.2.) mit $\Gamma := \Gamma_1$ und $\alpha := \alpha_1 = \beta_1$ ergibt:

(3) $I_A\big((\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)}) \dots (\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n \cup \{\alpha_n\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n)})\big)(f) =$

$I_{A_{p_1}^{\beta_1} \cap E}(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)})(f_2) =$

$\frac{1}{2}(I_{A_{p_1}^{\beta_1} \cap E} - I_{A_{q_1}^{\beta_1} \cap E})(f_2)$

(wobei $q_1 \in \{0,1\}$; $p_1 \neq q_1$).

Man kann nun $m \geq 2$ annehmen, denn wir wissen, da $\beta_1 = \alpha_1 \neq \alpha_2$, daß $\beta_1 \in (\Gamma_2 \cup \{\alpha_2\}) \setminus \{\alpha_2\} = \Gamma_2$ ist und damit $A_{p_1}^{\beta_1}, A_{q_1}^{\beta_1} \in \Sigma(\Gamma_2)$. Deshalb folgt für $m = 1$:

$I_{A_{p_1}^{\beta_1}}\big(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_2 \cup \{\alpha_2\})}(f_3)\big) = I_{A_{p_1}^{\beta_1}}\big(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_2)}(f_3)\big)$ und

$I_{A_{q_1}^{\beta_1}}\big(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_2 \cup \{\alpha_2\})}(f_3)\big) = I_{A_{q_1}^{\beta_1}}\big(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_2)}(f_3)\big)$.

Mit (3) ergibt sich:

$$I_A\big((\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1\cup\{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)})\ldots(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n\cup\{\alpha_n\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n)})\big)(f) = 0.$$

Somit sei i.f. $m \geq 2$.

Durch vollständige Induktion nach $\overline{m} := \min(i_0 - 1, m - 1)$ zeigen wir für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq i_0$ und $C,D \in \bigcap_{j=2}^{n} \Sigma(\Gamma_j)$, $C \cap D = \emptyset$:

$$(4)\quad (I_{(\bigcap_{k=2}^{m} A_{p_k}^{\beta_k} \cap C)} - I_{(\bigcap_{k=2}^{m} A_{p_k}^{\beta_k} \cap D)})(f_2) = 0.$$

Haben wir (4) bewiesen, sind wir mit (3) fertig.

Denn man setze in (4) $C := A_{p_1}^{\beta_1}$ und $D := A_{q_1}^{\beta_1}$. Dann sind C und D disjunkt, aber es gilt ferner $C, D \in \bigcap_{j=2}^{n} \Sigma(\Gamma_j)$, denn $\beta_1 = \alpha_1 \in \Gamma_j \cup \{\alpha_j\}$ für alle $j \in \{2,\ldots,n\}$ und damit $(\alpha_1 \neq \alpha_j)$ $\beta_1 \in \Gamma_j$.

Wir nehmen o.E. $\alpha_k = \beta_k$ für $k \in \{2,\ldots,\overline{m}\}$ an und setzen $B := \bigcap_{k=\overline{m}+1}^{m} A_{p_k}^{\beta_k}$.

<u>Induktionsanfang:</u> $\overline{m} = 1$: Es sei $C,D \in \bigcap_{j=2}^{n} \Sigma(\Gamma_j)$, $C \cap D = \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$.

i) Ist $\overline{m} = i_0 - 1$, so ist $\alpha_2 \notin \{\beta_1,\ldots,\beta_m\}$, und wir erhalten wegen $\{\beta_1,\ldots,\beta_m\} \subset \Gamma_1 \cup \{\alpha_1\} \subset \Gamma_2 \cup \{\alpha_2\}$:

$\{\beta_1,\ldots,\beta_m\} \subset (\Gamma_2 \cup \{\alpha_2\}) \setminus \{\alpha_2\} = \Gamma_2$

Also ist $B \in \Sigma(\Gamma_2)$ und man hat $(C,D \in \Sigma(\Gamma_2))$:

$I_{B\cap C}(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_2\cup\{\alpha_2\})}(f_3)) = I_{B\cap C}(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_2)}(f_3))$ und

$I_{B\cap D}(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_2\cup\{\alpha_2\})}(f_3)) = I_{B\cap D}(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_2)}(f_3))$. Damit ist (4) gezeigt.

ii) Falls $\overline{m} = m - 1 < i_0 - 1$ ist, so folgt $\alpha_2 = \beta_2$. Da $C,D \in \Sigma(\Gamma_2)$, wenden wir Lemma (4.4.2.) an $(q_2 \in \{0,1\}, p_2 \neq q_2$; man beachte hier $n \geq i_0 > 2)$:

$I_{A_{p_2}^{\beta_2}\cap C}(f_2) = \frac{1}{2}(I_{A_{p_2}^{\beta_2}\cap C} - I_{A_{q_2}^{\beta_2}\cap C})(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_3\cup\{\alpha_3\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_3)})(f_4)$ und

$I_{A_{p_2}^{\beta_2}\cap D}(f_2) = \frac{1}{2}(I_{A_{p_2}^{\beta_2}\cap D} - I_{A_{q_2}^{\beta_2}\cap D})(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_3\cup\{\alpha_3\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_3)})(f_4)$.

Weil $\beta_2 = \alpha_2 \in \Gamma_3 \cup \{\alpha_3\}$ und $\alpha_2 \neq \alpha_3$ sind, hat man $\alpha_2 \in \Gamma_3$.
Somit ist $A^{\beta_2}_{p_2}, A^{\beta_2}_{q_2}, C, D \in \Sigma(\Gamma_3)$ und jeder Term auf der rechten Seite der Gleichungen verschwindet.

Induktionsannahme: Die Aussage gilt für ein $\overline{m} - 1$ $(\overline{m} \geq 2)$.

Induktionsschluß: Es seien $\overline{m} \geq 2$, $C, D \in \bigcap_{j=2}^{n} \Sigma(\Gamma_j)$, $C \cap D = \emptyset$ und $n \in \mathbb{N}$. Da $\overline{m} \geq 2$ ist, hat man $n \geq i_0 \geq \overline{m} + 1 \geq 3$.

Man setze nun in Lemma (4.4.2.)

$$\Gamma := \Gamma_2, \ \alpha := \alpha_2 \text{ und } E := \bigcap_{k=3}^{m} A^{\beta_k}_{p_k} \cap C \quad (\text{bzw. } E := \bigcap_{k=3}^{m} A^{\beta_k}_{p_k} \cap D).$$

Wir haben
$$\{\beta_3, \ldots, \beta_m\} \subset (\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\}) \setminus \{\beta_1, \beta_2\}$$
$$\subset (\Gamma_2 \cup \{\alpha_2\}) \setminus \{\beta_2\} = \Gamma_2$$

denn $\alpha_2 = \beta_2$ $(i_0 \geq 3)$. Damit ist $\bigcap_{k=3}^{m} A^{\beta_k}_{p_k} \in \Sigma(\Gamma_2)$, also auch $E \in \Sigma(\Gamma_2)$.

i) Ist $i_0 - 1 = 2$ $(= \overline{m})$, so errechnet man mit Lemma (4.4.2.):

$$I_{A^{\alpha_2}_{p_2} \cap (B \cap C)}(f_2) = \tfrac{1}{2}(I_{A^{\alpha_2}_{p_2} \cap (B \cap C)} - I_{A^{\alpha_2}_{q_2} \cap (B \cap C)})(f_3)$$

$$I_{A^{\alpha_2}_{p_2} \cap (B \cap D)}(f_2) = \tfrac{1}{2}(I_{A^{\alpha_2}_{p_2} \cap (B \cap D)} - I_{A^{\alpha_2}_{q_2} \cap (B \cap D)})(f_3).$$

Es ist $\alpha_2 \neq \alpha_3$ und $\Gamma_2 \cup \{\alpha_2\} \subset \Gamma_3 \cup \{\alpha_3\}$. Deshalb folgt $A^{\alpha_2}_{p_2}, A^{\alpha_2}_{q_2} \in \Sigma(\Gamma_3)$. Ferner ist $\alpha_3 \notin \{\beta_3, \ldots, \beta_m\}$ und $\{\beta_3, \ldots, \beta_m\} \subset (\Gamma_2 \cup \{\alpha_2\}) \setminus \{\alpha_2\} = \Gamma_2$. Damit folgt $\{\beta_3, \ldots, \beta_m\} \subset \Gamma_2 \setminus \{\alpha_3\} \subset (\Gamma_3 \cup \{\alpha_3\}) \setminus \{\alpha_3\} = \Gamma_3$.

Also liegt B in $\Sigma(\Gamma_3)$.

Da nach Voraussetzung $C, D \in \Sigma(\Gamma_3)$, verschwindet jeder Term der rechten Seite der obigen Gleichungen. Weil $\alpha_2 = \beta_2$ ist, folgt (4).

ii) Es sei nun $i_0 - 1 > 2$. Mit Lemma (4.4.2.) errechnet man:

$$I_{A^{\alpha_2}_{p_2} \cap (\bigcap_{k=3}^{m} A^{\beta_k}_{p_k} \cap C)}(f_2) =$$

$$\tfrac{1}{2}\Big(I_{A^{\alpha_2}_{p_2} \cap (\bigcap_{k=3}^{m} A^{\beta_k}_{p_k} \cap C)} - I_{A^{\alpha_2}_{q_2} \cap (\bigcap_{k=3}^{m} A^{\beta_k}_{p_k} \cap C)}\Big)(f_3) \quad \text{und}$$

$$I_{A^{\alpha_2}_{p_2} \cap (\bigcap_{k=3}^{m} A^{\beta_k}_{p_k} \cap D)}(f_2) =$$

$$\tfrac{1}{2}\Big(I_{A^{\alpha_2}_{p_2} \cap (\bigcap_{k=3}^{m} A^{\beta_k}_{p_k} \cap D)} - I_{A^{\alpha_2}_{q_2} \cap (\bigcap_{k=3}^{m} A^{\beta_k}_{p_k} \cap D)}\Big)(f_3) .$$

Wenn man beachtet, daß $(A^{\alpha_2}_{p_2} \cap C) \cap (A^{\alpha_2}_{q_2} \cap D) = \emptyset$ und $(A^{\alpha_2}_{p_2} \cap D) \cap (A^{\alpha_2}_{q_2} \cap C) = \emptyset$ gilt, erhält man:

$$(5) \quad \Big(I_{\bigcap_{k=2}^{m} A^{\beta_k}_{p_k} \cap C} - I_{\bigcap_{k=2}^{m} A^{\beta_k}_{p_k} \cap D}\Big)(f_2) =$$

$$\tfrac{1}{2}\Big(I_{\bigcap_{k=3}^{m} A^{\beta_k}_{p_k} \cap ((A^{\alpha_2}_{p_2} \cap C) \cup (A^{\alpha_2}_{q_2} \cap D))} - I_{\bigcap_{k=3}^{m} A^{\beta_k}_{p_k} \cap ((A^{\alpha_2}_{p_2} \cap D) \cup (A^{\alpha_2}_{q_2} \cap C))}\Big)(f_3).$$

Man setzt nun

$$\overline{C} := (A^{\alpha_2}_{p_2} \cap C) \cup (A^{\alpha_2}_{q_2} \cap D) \quad \text{und}$$

$$\overline{D} := (A^{\alpha_2}_{p_2} \cap D) \cup (A^{\alpha_2}_{q_2} \cap C) \quad .$$

Weil $C \cap D = \emptyset$, haben wir auch $\overline{C} \cap \overline{D} = \emptyset$.

Weiter ist $\alpha_2 \neq \alpha_j$ für alle $j \in \{3,\ldots, n\}$. Damit hat man für $j \in \{3,\ldots, n\}$: $\alpha_2 \in (\Gamma_2 \cup \{\alpha_2\}) \setminus \{\alpha_j\} \subset (\Gamma_j \cup \{\alpha_j\}) \setminus \{\alpha_j\} = \Gamma_j$

Es ist $C,D \in \bigcap_{j=2}^{m} \Sigma(\Gamma_j)$ und damit $\overline{C},\overline{D} \in \bigcap_{j=3}^{m} \Sigma(\Gamma_j)$.

Wir wollen nun die Induktionsannahme anwenden. Sie lautet hier:

Sind $\Gamma'_2,\ldots, \Gamma'_{n'} \subsetneq [0, \lambda_0[$, $\aleph_0 \leq \operatorname{card} \Gamma_i$, $\alpha'_i \in [0\ \lambda_0[\setminus \Gamma'_i$ $(i \in \{2,\ldots,n'\})$,

$\Gamma'_i \cup \{\alpha'_i\} \subset \Gamma'_{i+1} \cup \{\alpha'_{i+1}\}$ $(i \in \{2,\ldots, n' - 1\})$,

$\beta'_2,\ldots,\beta'_{m'} \in \Gamma'_2 \cup \{\alpha'_2\}$, $p'_k \in \{0,1\}$ $(k \in \{2,\ldots,m'\})$,

$\overline{C},\overline{D} \in \bigcap_{j=2}^{n'} (\Gamma'_j)$, $\overline{C} \cap \overline{D} = \emptyset$,

$i'_0 := \min\{i \in \{2,\dots,n'\} \; ; \; \alpha'_i \notin \{\beta'_2,\dots,\beta'_{m'}\}\}$

und gilt $\min(i'_0 - 1 \, , \, m' - 1) = \overline{m} - 1$, so folgt für

$f'_2 := (\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma'_2 \cup \{\alpha'_2\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma'_2)}) \dots (\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma'_n \cup \{\alpha'_n\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma'_n)})(f)$:

$$(I_{\bigcap_{k=2}^{m'} A_{p'_k}^{\beta'_k} \cap \overline{C}} - I_{\bigcap_{k=2}^{m} A_{p'_k}^{\beta'_k} \cap \overline{D}})(f'_2) = 0.$$

Setzt man nun für $i \in \{2,\dots, n-1\}$ $\Gamma'_i := \Gamma_{i+1}$, $\alpha'_i := \alpha_{i+1}$, sowie für $k \in \{2,\dots, m-1\}$ $\beta'_k := \beta_{k+1}$, $p'_k := p_{k+1}$, so gilt $i'_0 = i_0 - 1$, $n' = n - 1$ und $m' = m - 1$ in der Formulierung der Induktionsannahme.

Man hat weiter $\min(i'_0 - 1 \, , \, m' - 1) = \overline{m} - 1$ und $f_3 = f'_2$.

Wir können daher mit der Induktionsannahme folgern:

$$(I_{(\bigcap_{k=2}^{m} A_{p_k}^{\beta_k} \cap C)} - I_{(\bigcap_{k=2}^{m} A_{p_k}^{\beta_k} \cap D)})(f_2) \underset{(5)}{=}$$

$$\tfrac{1}{2}(I_{(\bigcap_{k=2}^{m-1} A_{p'_k}^{\beta'_k} \cap \overline{C})} - I_{(\bigcap_{k=2}^{m-1} A_{p'_k}^{\beta'_k} \cap \overline{D})})(f_3) \underset{\text{Induktions-annahme}}{=} 0 \text{ und (4) ist gezeigt.}$$

<u>Beweis b)</u> Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

<u>Induktionsanfang:</u> <u>$n := 2$:</u> Man wendet zuerst Lemma (4.4 2.) auf

$\Gamma := \Gamma_1$, $\alpha := \alpha_1$ und $E := \bigcap_{k=2}^{m} A_{p_k}^{\beta_k}$ an.

Da $\{\beta_2,\dots, \beta_m\} \subset (\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\}) \setminus \{\beta_1\} \underset{\alpha_1 \neq \beta_1}{=} \Gamma_1$ gilt, ist $E \in \Sigma(\Gamma_1)$.

Lemma (4.4.2.) ergibt mit $q_1 \in \{0,1\}$, $p_1 \neq q_1$:

$$(6)\quad I_A\big((\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1\cup\{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)})(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_2\cup\{\alpha_2\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_2)})(f)\big)$$

$$= \tfrac{1}{2}(I_{A^{\alpha_1}_{p_1}\cap E} - I_{A^{\alpha_1}_{q_1}\cap E})(f_2)$$

$$= \tfrac{1}{2}(I_{A^{\alpha_2}_{p_2}\cap(A^{\alpha_1}_{p_1}\cap\bigcap_{k=3}^{m}A^{\beta_k}_{p_k})} - I_{A^{\alpha_2}_{p_2}\cap(A^{\alpha_1}_{q_1}\cap\bigcap_{k=3}^{m}A^{\beta_k}_{p_k})})(f_2)\ .$$

Es ist $\{\beta_1,\beta_3,\ldots,\beta_m\}\in(\Gamma_1\cup\{\alpha_1\})\setminus\{\beta_2\} \underset{\alpha_2=\beta_2}{\subset} (\Gamma_2\cup\{\alpha_2\})\setminus\{\alpha_2\} = \Gamma_2$

und damit $\bigcap_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{m} A^{\beta_k}_{p_k}\in\Sigma(\Gamma_2)$ und $\bigcap_{k=3}^{m} A^{\beta_k}_{p_k}\cap A^{\beta_1}_{q_1}\in\Sigma(\Gamma_2)$.

Setzt man in Lemma (4.4.2.) $\Gamma := \Gamma_2$, $\alpha := \alpha_2$ und

$E := \bigcap_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{m} A^{\beta_k}_{p_k}$ (bzw. $E := A^{\alpha_1}_{q_1}\cap\bigcap_{k=3}^{m}A^{\beta_k}_{p_k}$) , so erhält man mit (6):

$$I_A(f_1) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}(I_{A^{\alpha_2}_{p_2}\cap(A^{\alpha_1}_{p_1}\cap\overline{A})} - I_{A^{\alpha_2}_{q_2}\cap(A^{\alpha_1}_{p_1}\cap\overline{A})}$$

$$- I_{A^{\alpha_2}_{p_2}\cap(A^{\alpha_1}_{q_1}\cap\overline{A})} + I_{A^{\alpha_2}_{q_2}\cap(A^{\alpha_1}_{q_1}\cap\overline{A})})(f)$$

$$= \tfrac{1}{4}(I_{\overline{A}\cap((A^{\alpha_1}_{p_1}\cap C)\cup(A^{\alpha_1}_{q_1}\cap D))} - I_{\overline{A}\cap((A^{\alpha_1}_{p_1}\cap D)\cup(A^{\alpha_1}_{q_1}\cap C))})(f)\ ,$$

wobei $C := A^{\alpha_2}_{p_2}$ und $D := A^{\alpha_2}_{q_2}$ gesetzt sind. Wir haben $C\cap D = \emptyset$ und

$C,D\in\Sigma\big((\Gamma_2\cup\{\alpha_2\})\setminus(\bigcup_{k=3}^{m}\{\beta_k\}\cup\{\alpha_1\})\big)$, denn $\alpha_2\neq\beta_j$ für $j\in\{1,\ldots,m\}$, $j\neq 2$, und $\alpha_2\neq\alpha_1$.

<u>Induktionsannahme:</u> Die Aussage sei für alle natürlichen Zahlen kleiner gleich $(n-1)$ richtig $(n\geq 3)$.

<u>Induktionsschluß:</u> Wir unterscheiden zwei Fälle

<u>1. Fall: Es sei $1\leq i\leq n-1$</u>

Wir wenden die Induktionsannahme auf $n-1$ und f_n an. Es gibt

$\bar{C},\bar{D} \in \Sigma\big((\Gamma_{n-1} \cup \{\alpha_{n-1}\}) \setminus (\bigcup_{k=n}^{m} \{\beta_k\} \cup \{\alpha_i\})\big)$, so daß mit $A := \bigcap_{k=n}^{m} A_{p_k}^{\beta_k}$

folgt:

(7) $I_A(f_1) =$

$$2^{-(n-1)}\Big(I_{\bar{\bar{A}} \cap ((A_{p_i}^{\alpha_i} \cap \bar{C}) \cup (A_{q_i}^{\alpha_i} \cap \bar{D}))} - I_{\bar{\bar{A}} \cap ((A_{p_i}^{\alpha_i} \cap \bar{D}) \cup (A_{q_i}^{\alpha_i} \cap \bar{C}))}\Big)(f_n) =$$

$$2^{-(n-1)}\Big(I_{A_{p_n}^{\alpha_n} \cap (\bar{A} \cap ((A_{p_i}^{\alpha_i} \cap \bar{C}) \cup (A_{q_i}^{\alpha_i} \cap \bar{D})))} - I_{A_{p_n}^{\alpha_n} \cap (\bar{A} \cap ((A_{p_i}^{\alpha_i} \cap \bar{D}) \cup (A_{q_i}^{\alpha_i} \cap \bar{C})))}\Big)(f) \underset{\text{Lemma (4.4.2.)}}{=}$$

$$2^{-n}\Big(I_{A_{p_n}^{\alpha_n} \cap (\bar{A} \cap ((A_{p_i}^{\alpha_i} \cap \bar{C}) \cup (A_{q_i}^{\alpha_i} \cap \bar{D})))} - I_{A_{q_n}^{\alpha_n} \cap (\bar{A} \cap ((A_{p_i}^{\alpha_i} \cap \bar{C}) \cup (A_{q_i}^{\alpha_i} \cap \bar{D})))} + I_{A_{p_n}^{\alpha_n} \cap (\bar{A} \cap ((A_{p_i}^{\alpha_i} \cap \bar{D}) \cup (A_{q_i}^{\alpha_i} \cap \bar{C})))}\Big)(f) =$$

$$2^{-n}\Big(I_{\bar{A} \cap ((A_{p_i}^{\alpha_i} \cap \bar{C} \cap A_{p_n}^{\alpha_n}) \cup (A_{q_i}^{\alpha_i} \cap \bar{D} \cap A_{p_n}^{\alpha_n}))} + I_{\bar{A} \cap ((A_{p_i}^{\alpha_i} \cap \bar{D} \cap A_{q_n}^{\alpha_n}) \cup (A_{q_i}^{\alpha_i} \cap \bar{C} \cap A_{q_n}^{\alpha_n}))} - I_{\bar{A} \cap ((A_{p_i}^{\alpha_i} \cap \bar{C} \cap A_{q_n}^{\alpha_n}) \cup (A_{q_i}^{\alpha_i} \cap \bar{D} \cap A_{q_n}^{\alpha_n}))} - I_{\bar{A} \cap ((A_{p_i}^{\alpha_i} \cap \bar{D} \cap A_{p_n}^{\alpha_n}) \cup (A_{q_n}^{\alpha_i} \cap \bar{C} \cap A_{p_n}^{\alpha_n}))}\Big)(f) \qquad (q_n \in \{0,1\}, p_n \neq q_n).$$

Dabei wird Lemma (4.4.2.) auf $\alpha := \alpha_n$, $\Gamma := \Gamma_n$

$E := \bar{A} \cap \{(A_{p_i}^{\alpha_i} \cap \bar{C}) \cup (A_{q_i}^{\alpha_i} \cap \bar{D})\}$ (bzw. $E := \bar{A} \cap ((A_{p_i}^{\alpha_i} \cap \bar{D}) \cup (A_{q_i}^{\alpha_i} \cap \bar{C}))$)

angewendet.

Es ist $\alpha_i \neq \alpha_n$ und damit $\alpha_i \in (\Gamma_n \cup \{\alpha_n\}) \setminus \{\alpha_n\} = \Gamma_n$. Weiter hat man

$(\Gamma_{n-1} \cup \{\alpha_{n-1}\}) \setminus (\bigcup_{k=n}^{m} \{\beta_k\} \cup \{\alpha_i\}) \subset (\Gamma_n \cup \{\alpha_n\}) \setminus (\bigcup_{k=n}^{m} \{\beta_k\} \cup \{\alpha_i\}) \underset{\alpha_n \equiv \beta_n}{\subseteq} \Gamma_n$,

d.h. $\bar{C}, \bar{D} \in \Sigma(\Gamma_n)$.

Weil $\{\beta_{n+1}, \ldots, \beta_n\} \subset (\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\}) \setminus \{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \subset (\Gamma_n \cup \{\alpha_n\}) \setminus \{\beta_n\} \underset{\alpha_n \equiv \beta_n}{\subseteq} \Gamma_n$,

hat man $\bar{A} \in \Sigma(\Gamma_n)$ und insgesamt $E \in \Sigma(\Gamma_n)$.

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma (4.4.2.) erfüllt.

Setzen wir nun

$C := (\bar{C} \cap A_{p_n}^{\alpha_n}) \cup (\bar{D} \cap A_{q_n}^{\alpha_n})$ bzw.

$D := (\bar{D} \cap A_{p_n}^{\alpha_n}) \cup (\bar{C} \cap A_{q_n}^{\alpha_n})$, so folgt nach Voraussetzung $C \cap D = \emptyset$ und

$C, D \in \Sigma\big((\Gamma_n \cup \{\alpha_n\}) \setminus (\bigcup_{k=n+1}^{m} \{\beta_k\} \cup \{\alpha_i\})\big)$

(denn $(\Gamma_{n-1} \cup \{\alpha_{n-1}\}) \setminus (\bigcup_{k=n}^{m} \{\beta_k\} \cup \{\alpha_i\}) \subset (\Gamma_n \cup \{\alpha_n\}) \setminus (\bigcup_{k=n+1}^{m} \{\beta_k\} \cup \{\alpha_i\})$).

Insgesamt können wir dann mit (7) errechnen:

$$I_A\big((\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)}) \ldots (\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n \cup \{\alpha_n\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n)})(f)\big) =$$

$$2^{-n}(I_{\bar{A} \cap A_{p_i}^{\alpha_i} \cap C} + I_{\bar{A} \cap A_{q_i}^{\alpha_i} \cap D} - I_{\bar{A} \cap A_{p_i}^{\alpha_i} \cap D} - I_{\bar{A} \cap A_{q_i}^{\alpha_i} \cap C})(f) =$$

$$2^{-n}(I_{\bar{A} \cap ((A_{p_i}^{\alpha_i} \cap C) \cup (A_{q_i}^{\alpha_i} \cap D))} - I_{\bar{A} \cap ((A_{p_i}^{\alpha_i} \cap D) \cup (A_{q_i}^{\alpha_i} \cap C))})(f) .$$

2. Fall: $i = n - 1$: Zuerst zeigen wir mit $\bar{\bar{A}} := \bigcap_{k=n}^{m} A_{p_k}^{\beta_k}$:

(8) Es gibt $\bar{C}, \bar{D} \in \Sigma\{\Gamma_{n-1} \setminus (\bigcup_{k=n}^{m} \{\beta_k\})\}$, $\bar{C} \cap \bar{D} = \emptyset$ derart, daß

$$I_A(f_1) = 2^{-(n-1)}(I_{\bar{\bar{A}} \cap ((A_{p_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \cap \bar{C}) \cup (A_{q_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \cap \bar{D}))} - I_{\bar{\bar{A}} \cap ((A_{p_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \cap \bar{D}) \cup (A_{q_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \cap \bar{C}))})(f_n).$$

Beweis hierzu: Auch hier betrachten wir zwei Fälle:

(2.1.) Fall: $n = 3$: Wir wenden Lemma (4.4.2.) auf $\Gamma := \Gamma_1$, $\alpha := \alpha_1$ und $E := \bigcap_{k=2}^{m} A_{p_k}^{\beta_k}$ an:

$$I_A(f_1) = \tfrac{1}{2}(I_{A_{p_1}^{\alpha_1} \cap E} - I_{A_{q_1}^{\alpha_1} \cap E})(f_2)$$

$$= \tfrac{1}{2}(I_{A_{p_2}^{\alpha_2} \cap A_{p_1}^{\alpha_1} \cap \bar{\bar{A}}} - I_{A_{p_2}^{\alpha_2} \cap A_{q_1}^{\alpha_1} \cap \bar{\bar{A}}})(f_2) \qquad (q_1 \in \{0,1\}, p_1 \neq q_1)$$

Man benutzt erneut Lemma (4.4.2.) und setzt dort $\Gamma := \Gamma_2$, $\alpha := \alpha_2$,

$E := A_{p_1}^{\alpha_1} \cap \bar{\bar{A}}$ (bzw. $E := A_{q_1}^{\alpha_1} \cap \bar{\bar{A}}$). $E \in \Sigma(\Gamma_2)$, denn

$\{\beta_1, \beta_3, \ldots, \beta_m\} \subset (\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\}) \setminus \{\beta_2\} \underset{\alpha_2 \equiv \beta_2}{\subseteq} (\Gamma_2 \cup \{\alpha_2\}) \setminus \{\alpha_2\} = \Gamma_2$.

$$I_A(f_1) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}(I_{A_{p_2}^{\alpha_2} \cap (A_{p_1}^{\alpha_1} \cap \bar{\bar{A}})} - I_{A_{q_2}^{\alpha_2} \cap (A_{p_1}^{\alpha_1} \cap \bar{\bar{A}})} - I_{A_{p_2}^{\alpha_2} \cap (A_{q_1}^{\alpha_1} \cap \bar{\bar{A}})} + I_{A_{q_2}^{\alpha_2} \cap (A_{q_1}^{\alpha_1} \cap \bar{\bar{A}})})(f_3)$$

$$= \tfrac{1}{4}(I_{\bar{\bar{A}} \cap ((A_{p_2}^{\alpha_2} \cap \bar{C}) \cup (A_{q_2}^{\alpha_2} \cap \bar{D}))} - I_{\bar{\bar{A}} \cap ((A_{p_2}^{\alpha_2} \cap \bar{D}) \cup (A_{q_2}^{\alpha_2} \cap \bar{C}))})(f_3),$$

wobei $q_2 \in \{0,1\}$, $p_2 \neq q_2$ und $\bar{C} := A_{p_1}^{\alpha_1}$, $\bar{D} := A_{q_1}^{\alpha_1}$ sind.

Es ist $\alpha_1 = \beta_1 \in (\Gamma_2 \cup \{\alpha_2\}) \setminus \{\beta_2, \ldots, \beta_m\} \underset{\alpha_2 \equiv \beta_2}{=} \Gamma_2 \setminus \{\beta_3, \ldots, \beta_m\}$,
denn $\beta_1 \neq \beta_j$ für $j \in \{2, \ldots, m\}$.

Somit ist $\bar{C}, \bar{D} \in \Sigma(\Gamma_2 \setminus \bigcup_{k=3}^{m} \{\beta_k\})$, $C \cap D = \emptyset$, und (8) ist für $n = 3$ gezeigt.

<u>(2.2.) Fall:</u> <u>$n \geq 3$:</u> Hier wenden wir die Induktionsannahme auf $n - 2$ an.

(9) Es gibt $\tilde{C}, \tilde{D} \in \Sigma\big((\Gamma_{n-2} \cup \{\alpha_{n-2}\}) \setminus (\bigcup_{k=n-1}^{m} \{\beta_k\} \cup \{\alpha_{n-3}\})\big)$, $C \cap D = \emptyset$,

so daß für $\tilde{A} := \bigcap_{k=n-1}^{m} A_{p_k}^{\beta_k}$ und $q_{n-3} \in \{0,1\}$, $p_{n-3} \neq q_{n-3}$ gilt:

$$I_A(f_1) = 2^{-(n-2)}\Big(I_{\tilde{A} \cap ((A_{p_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{C}) \cup (A_{q_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{D}))} - I_{\tilde{A} \cap ((A_{p_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{D}) \cup (A_{q_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{C}))}\Big)(f_{n-1})$$

$$= 2^{-(n-2)}\Big(I_{A_{p_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \cap (((A_{p_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{C}) \cup (A_{q_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{D})) \cap \bar{\bar{A}})} - I_{A_{p_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \cap (((A_{p_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{D}) \cup (A_{q_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{C})) \cap \bar{\bar{A}})}\Big)(f_{n-1}) .$$

Wir wenden nun erneut Lemma (4.4.2.) an. Dabei setze man $\Gamma := \Gamma_{n-1}$,

$\alpha := \alpha_{n-1}$ und $E := \big((A_{p_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{C}) \cup (A_{q_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{D})\big) \cap \bar{\bar{A}}$

(bzw. $E := \big((A_{p_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{D}) \cup (A_{q_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{C})\big) \cap \bar{\bar{A}}$).

Es ist $\alpha_{n-3} \in (\Gamma_{n-1} \cup \{\alpha_{n-1}\}) \setminus \{\alpha_{n-1}\} = \Gamma_{n-1}$, da $\alpha_{n-3} \neq \alpha_{n-1}$ ist.

Weiter hat man $(\Gamma_{n-2} \cup \{\alpha_{n-2}\}) \setminus (\bigcup_{k=n-1}^{m} \{\beta_k\} \cup \{\alpha_{n-3}\}) \subset$

$$(\Gamma_{n-1} \cup \{\alpha_{n-1}\}) \setminus (\bigcup_{k=n-1}^{m} \{\beta_k\} \cup \{\alpha_{n-3}\}) \underset{\alpha_{n-1} \equiv \beta_{n-1}}{\subseteq} \Gamma_{n-1}$$

Außerdem ist $\{\beta_n,\ldots,\beta_m\} \subset (\Gamma_{n-1} \cup \{\alpha_{n-1}\}) \setminus \{\beta_{n-1}\}$ $\alpha_{n-1} \overset{\subseteq}{=} \beta_{n-1}$ Γ_{n-1} .

Damit sind $A_{p_{n-3}}^{\alpha_{n-3}}$, $A_{q_{n-3}}^{\alpha_{n-3}}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$, $\bar{\bar{A}} \in \Sigma(\Gamma_{n-1})$, was $E \in \Sigma(\Gamma_1)$ impliziert.

Aus Lemma (4.4.2.) erhält man damit (9):

$$
\begin{aligned}
(10)\quad I_A(f_1) = 2^{-(n-1)} \cdot \tfrac{1}{2}\Big(& I_{A_{p_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \cap (((A_{p_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{C}) \cup (A_{q_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{D})) \cap \bar{\bar{A}})} - \\
& I_{A_{q_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \cap (((A_{p_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{C}) \cup (A_{q_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{D})) \cap \bar{\bar{A}})} - \\
& I_{A_{p_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \cap (((A_{p_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{D}) \cup (A_{q_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{C})) \cap \bar{\bar{A}})} + \\
& I_{A_{q_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \cap (((A_{p_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{D}) \cup (A_{q_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{C})) \cap \bar{\bar{A}})} \Big)(f_n)
\end{aligned}
$$

Wir setzen nun $\bar{C} := (A_{p_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{C}) \cup (A_{q_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{D})$ und

$$\bar{D} := (A_{p_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{D}) \cup (A_{q_{n-3}}^{\alpha_{n-3}} \cap \tilde{C}) \quad .$$

Weil $\tilde{C} \cap \tilde{D} = \emptyset$, ist auch $\bar{C} \cap \bar{D} = \emptyset$. Weiter sind

$\alpha_{n-3} \in \Gamma_{n-1} \cup \{\alpha_{n-1}\}$,

$$
\begin{aligned}
\{\alpha_{n-3}\} \cup \Big((\Gamma_{n-2} \cup \{\alpha_{n-2}\}) \setminus \Big(\bigcup_{k=n-1}^{m} \{\beta_k\} \cup \{\alpha_{n-3}\}\Big)\Big) & \subset \\
(\Gamma_{n-1} \cup \{\alpha_{n-1}\}) \setminus \Big(\bigcup_{k=n-1}^{m} \{\beta_k\}\Big) & \qquad \alpha_{n-1} \overset{\subseteq}{=} \beta_{n-1} \\
\Gamma_{n-1} \setminus \Big(\bigcup_{k=n}^{m} \{\beta_k\}\Big).
\end{aligned}
$$

Somit ist $\bar{C},\bar{D} \in \Sigma\Big(\Gamma_{n-1} \setminus \Big(\bigcup_{k=n}^{m}\{\beta_k\}\Big)\Big)$, und es folgt aus (10):

$$I_A(f_1) = 2^{-(n-1)}\Big(I_{\bar{\bar{A}} \cap \left((A^{\alpha_{n-1}}_{p_{n-1}} \cap \bar{C}) \cup (A^{\alpha_{n-1}}_{q_{n-1}} \cap \bar{D})\right)} - I_{\bar{\bar{A}} \cap \left((A^{\alpha_{n-1}}_{p_{n-1}} \cap \bar{D}) \cup (A^{\alpha_{n-1}}_{q_{n-1}} \cap \bar{C})\right)}\Big)(f_n) \quad .$$

Damit ist (8) vollständig bewiesen.

Wir fahren mit dem Beweis des 2. Falles fort.

Es wird nun erneut Lemma (4.4.2.) verwendet. Dort setze man $\Gamma := \Gamma_n$, $\alpha := \alpha_n$ und $E := \bar{A} \cap \left((A^{\alpha_{n-1}}_{p_{n-1}} \cap \bar{C}) \cup (A^{\alpha_{n-1}}_{q_{n-1}} \cap \bar{D})\right)$

(bzw. $E := \bar{A} \cap ((A^{\alpha_{n-1}}_{p_{n-1}} \cap \bar{D}) \cup (A^{\alpha_{n-1}}_{q_{n-1}} \cap \bar{C}))$).

Es ist $\alpha_{n-1} \neq \alpha_n$ und damit $\alpha_{n-1} \in (\Gamma_n \cup \{\alpha_n\}) \setminus \{\alpha_n\} = \Gamma_n$.

Ferner gilt $\Gamma_{n-1} \setminus (\bigcup_{k=n}^{m} \{\beta_k\}) \subset (\Gamma_n \cup \{\alpha_n\}) \setminus (\bigcup_{k=n}^{m} \{\beta_k\}) \underset{\alpha_n \subseteq \beta_n}{=} \Gamma_n$ und

$\{\beta_{n+1}, \ldots, \beta_m\} \subset (\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\}) \setminus \{\beta_n\} \subset (\Gamma_n \cup \{\alpha_n\}) \setminus \{\beta_n\} \underset{\alpha_n \subseteq \beta_n}{=} \Gamma_n$.

Damit ist insgesamt $A^{\alpha_{n-1}}_{p_{n-1}}$, $A^{\alpha_{n-1}}_{q_{n-1}}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$, $\bar{A} \in \Sigma(\Gamma_n)$ und $E \in \Sigma(\Gamma_n)$.

Lemma (4.4.2.) kann man also auf (8) anwenden:

$$I_A(f_1) = 2^{-(n-1)}\Big(I_{A^{\alpha_n}_{p_n} \cap \left((A^{\alpha_{n-1}}_{p_{n-1}} \cap \bar{C}) \cup (A^{\alpha_{n-1}}_{q_{n-1}} \cap \bar{D})\right) \cap \bar{A}} - I_{A^{\alpha_n}_{p_n} \cap \left((A^{\alpha_{n-1}}_{p_{n-1}} \cap \bar{D}) \cup (A^{\alpha_{n-1}}_{q_{n-1}} \cap \bar{C})\right) \cap \bar{A}}\Big)(f_n) \underset{\text{Lemma (4.4.2.)}}{=}$$

$$= 2^{-n}\Big(I_{A^{\alpha_n}_{p_n} \cap \left(\left(\left(A^{\alpha_{n-1}}_{p_{n-1}} \cap \overline{C}\right) \cup \left(A^{\alpha_{n-1}}_{q_{n-1}} \cap \overline{D}\right)\right) \cap \overline{A}\right)} - I_{A^{\alpha_n}_{q_n} \cap \left(\left(\left(A^{\alpha_{n-1}}_{p_{n-1}} \cap \overline{C}\right) \cup \left(A^{\alpha_{n-1}}_{q_{n-1}} \cap \overline{D}\right)\right) \cap \overline{A}\right)} - I_{A^{\alpha_n}_{p_n} \cap \left(\left(\left(A^{\alpha_{n-1}}_{p_{n-1}} \cap \overline{D}\right) \cup \left(A^{\alpha_{n-1}}_{q_{n-1}} \cap \overline{C}\right)\right) \cap \overline{A}\right)} + I_{A^{\alpha_n}_{q_n} \cap \left(\left(\left(A^{\alpha_{n-1}}_{p_{n-1}} \cap \overline{D}\right) \cup \left(A^{\alpha_{n-1}}_{q_{n-1}} \cap \overline{C}\right)\right) \cap \overline{A}\right)}\Big)(f)$$

$$= 2^{-n}\Big(I_{\overline{A} \cap \left(\left(A^{\alpha_{n-1}}_{p_{n-1}} \cap \left(\left(A^{\alpha_n}_{p_n} \cap \overline{C}\right) \cup \left(A^{\alpha_n}_{q_n} \cap \overline{D}\right)\right)\right) \cup \left(A^{\alpha_{n-1}}_{q_{n-1}} \cap \left(\left(A^{\alpha_n}_{p_n} \cap \overline{D}\right) \cup \left(A^{\alpha_n}_{q_n} \cap \overline{C}\right)\right)\right)\right)} - I_{\overline{A} \cap \left(\left(A^{\alpha_{n-1}}_{p_{n-1}} \cap \left(\left(A^{\alpha_n}_{p_n} \cap \overline{D}\right) \cup \left(A^{\alpha_n}_{q_n} \cap \overline{C}\right)\right)\right) \cup \left(A^{\alpha_{n-1}}_{q_{n-1}} \cap \left(\left(A^{\alpha_n}_{p_n} \cap \overline{C}\right) \cup \left(A^{\alpha_n}_{q_n} \cap \overline{D}\right)\right)\right)\right)}\Big)(f)$$

(dabei ist $q_n \in \{0,1\}$, $p_n \neq q_n$).

Setzt man $C := (A^{\alpha_n}_{p_n} \cap \overline{C}) \cup (A^{\alpha_n}_{q_n} \cap \overline{D})$ und

$$D := (A^{\alpha_n}_{p_n} \cap \overline{D}) \cup (A^{\alpha_n}_{q_n} \cap \overline{C}) \quad ,$$

so ist aufgrund der Eigenschaft von $\overline{C},\overline{D}$ $C \cap D = \emptyset$.

Da $\left(\Gamma_{n-1} \setminus \left(\bigcup_{k=n}^{m} \{\beta_k\}\right)\right) \cup \{\alpha_n\}_{\alpha_{n-1}} \subsetneq \Gamma_{n-1}$ $(\Gamma_n \cup \{\alpha_n\}) \setminus \left(\bigcup_{k=n+1}^{m} \{\beta_k\} \cup \{\alpha_{n-1}\}\right)$

ergibt sich $C,D \in \Sigma\left((\Gamma_n \cup \{\alpha_n\}) \setminus \left(\bigcup_{k=n+1}^{m} \{\beta_k\} \cup \{\alpha_{n-1}\}\right)\right)$.

Man erhält schließlich:

$$I_A\left((\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)}) \ldots (\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n \cup \{\alpha_n\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n)})(f)\right) =$$

$$2^{-n}\Big(I_{\overline{A} \cap \left(\left(A^{\alpha_{n-1}}_{p_{n-1}} \cap C\right) \cup \left(A^{\alpha_{n-1}}_{q_{n-1}} \cap D\right)\right)} - I_{\overline{A} \cap \left(\left(A^{\alpha_{n-1}}_{p_{n-1}} \cap D\right) \cup \left(A^{\alpha_{n-1}}_{q_{n-1}} \cap C\right)\right)}\Big)(f)$$

Der Beweis von Lemma (4.4.3.) ist damit abgeschlossen. □

Wir formulieren noch einmal das zu lösende algebraische Problem (*) und beweisen die Aussage (*) durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

(4.4.4.) Es seien $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n \subsetneq [0,\lambda_0[$, $\aleph_0 \leq \operatorname{card} \Gamma_i$, $\alpha_i \in [0,\lambda_0[\setminus \Gamma_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ mit $(\Gamma_i \cup \{\alpha_i\}) \subset (\Gamma_{i+1} \cup \{\alpha_{i+1}\})$ $(i = 1,\ldots, n-1)$.

Ferner sei $A = \bigcap_{k=1}^{m} A_{p_k}^{\beta_k} \in \mathfrak{a}(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})$, $p_k \in \{0,1\}$, $\beta_k \in \Gamma_1 \cup \{\alpha_1\}$ $k \in \{1,\ldots,m\}$, $m \in \mathbb{N}$.

Dann gibt es $C,D \in Q_{\lambda_0}$, $C \cap D = \emptyset$ und $K \geq 0$, so daß für $f \in L_1(D_{\lambda_0},X)$ gilt:

$$I_A\big((\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)})\ldots(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n \cup \{\alpha_n\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n)})(f)\big) = K(I_C - I_D)(f) .$$

<u>Beweis hierzu:</u>

<u>Induktionsanfang:</u> <u>$n = 1$:</u> Es seien $\Gamma_1 \subsetneq [0,\lambda_0[$, $\aleph_0 \leq \operatorname{card} \Gamma_1$, $\alpha_1 \in [0,\lambda_0[\setminus \Gamma_1$, und $A = \bigcap_{k=1}^{m} A_{p_k}^{\beta_k} \in \mathfrak{a}(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})$, $p_k \in \{0,1\}$, $\beta_k \in \Gamma_1 \cup \{\alpha_1\}$, $k \in \{1,\ldots,m\}$, $m \in \mathbb{N}$.

<u>1. Fall:</u> Für alle $k \in \{1,\ldots,m\}$ ist $\alpha_1 \neq \beta_k$. Dann ist nach Lemma (4.4.3. a) $I_A\big((\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)})(f)\big) = 0$.

Die Aussage folgt mit $C = D = \emptyset$.

<u>2. Fall:</u> Es sei $\alpha_1 \in \{\beta_1,\ldots, \beta_m\}$, o.E. $\alpha_1 = \beta_1$. Weil $\beta_1 \neq \beta_j$ für $j \in \{2,\ldots, m\}$ ist, hat man $\{\beta_2,\ldots, \beta_m\} \subset \Gamma_1$, und es folgt

$$\bigcap_{k=2}^{m} A_{p_k}^{\beta_k} \in \Sigma(\Gamma_1) \quad \Big(\bigcap_{k=2}^{m} A_{p_k}^{\beta_k} := D_{\lambda_0} \text{ für } m = 1\Big).$$

Mit Lemma (4.4.2.) erhält man (dort wird $E := \bigcap_{k=2}^{m} A_{p_k}^{\beta_k}$ gesetzt):

$$I_A\big((\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)})(f)\big) = \tfrac{1}{2}\Big(I_{A_{p_1}^{\alpha_1} \cap \bigcap_{k=2}^{m} A_{p_k}^{\beta_k}} - I_{A_{q_1}^{\alpha_1} \cap \bigcap_{k=2}^{m} A_{p_k}^{\beta_k}}\Big)(f) .$$

Damit ist die Aussage mit $K := \frac{1}{2}$ für $n = 1$ gezeigt.

<u>Induktionsannahme:</u> Die Aussage sei für ein $n - 1$ $(n \geq 2)$ richtig.

<u>Induktionsschluß:</u> Wir setzen für $f \in L_1(D_{\lambda_0}, X)$ und $j \in \{1,\dots,n\}$:

$f_j := (\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_j \cup \{\alpha_j\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_j)}) \dots (\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n \cup \{\alpha_n\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n)})(f)$, sowie

$f_{n+1} := f$.

<u>1. Fall:</u> Für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$ gelte $\alpha_i \neq \alpha_j$ falls $i \neq j$.

(1.1.) Es gibt ein $i \in \{1,\dots,n\}$ mit $\alpha_i \notin \{\beta_1,\dots, \beta_m\}$, dann hat man mit Lemma (4.4.3. a):

$$I_A\big\{(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)}) \dots (\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n \cup \{\alpha_n\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n)})(f)\big\} = 0.$$

(1.2.) Wir nehmen nun $\{\alpha_1,\dots, \alpha_n\} \subset \{\beta_1,\dots, \beta_m\}$ an.

Dann sei o.E. $\alpha_k = \beta_k$ für $k \in \{1,\dots, n\}$.

Die Voraussetzungen von Lemma (4.4.3. b) sind erfüllt und es gibt $C^1, D^2 \in Q_{\lambda_0}$, $C^1 \cap D^1 = \emptyset$, so daß mit $\bar{A} := \bigcap_{k=n+1}^{m} A_{p_k}^{\beta_k}$ gilt:

$$I_A\big((\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)}) \dots (\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n \cup \{\alpha_n\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n)})(f) =$$

$$2^{-n}\Big(I_{\bar{A} \cap ((A_{p_1}^{\alpha_1} \cap C^1) \cup (A_{q_1}^{\alpha_1} \cap D^1))} - I_{\bar{A} \cap ((A_{p_1}^{\alpha_1} \cap D^1) \cup (A_{q_1}^{\alpha_1} \cap C^1))}\Big)(f) =$$

$$= K(I_C - I_D)(f) ,$$

wobei $K := 2^{-n}$, $C := \bar{A} \cap \big((A_{p_1}^{\alpha_1} \cap C^1) \cup (A_{q_1}^{\alpha_1} \cap D^1)\big)$ und

$D := \bar{A} \cap \big((A_{p_1}^{\alpha_1} \cap D^1) \cup (A_{q_1}^{\alpha_1} \cap C^1)\big)$, $C \cap D = \emptyset$.

<u>2. Fall:</u> Es gibt $i,j \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq j$ mit $\alpha_i = \alpha_j$.

(2.1.) Wir betrachten zuerst den Fall: Es existiert $j \in \{2,\dots,n\}$ mit $\alpha_{j-1} = \alpha_j$.

Dann gilt $\Gamma_{j-1} \subset (\Gamma_j \cup \{\alpha_j\}) \setminus \{\alpha_{j-1}\} \subset (\Gamma_j \cup \{\alpha_j\}) \setminus \{\alpha_j\} = \Gamma_j$.

Weiter folgt für $j > 2$:

$$f_1 = (\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)}) \ldots$$

$$\ldots(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_{j-1} \cup \{\alpha_{j-1}\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_{j-1})})(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_j \cup \{\alpha_j\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_j)})(f_{j+1})$$

$$= (\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)}) \ldots \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_{j-1} \cup \{\alpha_{j-1}\})}(f_j) -$$

$$(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)}) \ldots \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_{j-1})}(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_j \cup \{\alpha_j\})} - \mathbb{E}_{\Gamma_j})(f_{j+1}).$$

Man beachte nun, daß $\Gamma_{j-1} \subset \Gamma_j$ gilt, und somit der 2. Term in der letzten Gleichung verschwindet. Weil man für alle $i \in \{1,\ldots, j-2\}$ $\Gamma_i \cup \{\alpha_i\} \subset \Gamma_{j-1} \cup \{\alpha_{j-1}\}$ hat, folgt:

$$f_1 = (\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)}) \ldots$$

$$\ldots(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_{j-2} \cup \{\alpha_{j-2}\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_{j-2})})(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_j \cup \{\alpha_j\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_j)})(f_{j+1}).$$

Man wendet nun die Induktionsannahme an.

Falls $j = 2$ ist, ergibt sich:

$$f_1 = \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})}(f_2) - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)}(f_2) = \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})}(f_2)$$

(denn $\Sigma(\Gamma_1) \subset \Sigma(\Gamma_2) \subset \Sigma(\Gamma_2 \cup \{\alpha_2\})$).

Da $A \in \Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})$ hat man: $I_A(f_1) = I_A(f_2)$.

Es ist $A \in \mathfrak{g}(\Gamma_2 \cup \{\alpha_2\})$, und somit läßt sich die Induktionsannahme auf $\Gamma_2,\ldots, \Gamma_n$ und $\alpha_2,\ldots, \alpha_n$ anwenden.

(2.2.): Wir setzen nun voraus, daß $\alpha_{j-1} \neq \alpha_j$ für $j \in \{2,\ldots,n\}$ ist, und es gibt $i,j \in \{1,\ldots, n\}$, $i < j-1$, mit $\alpha_i = \alpha_j$.

Man setze $j_0 := \min\{j \in \{1,\ldots,n\}$; es gibt $i \in \{1,\ldots, j-2\}$ mit $\alpha_i = \alpha_j\}$ und wähle $i_0 \in \{1,\ldots, j_0 - 2\}$ mit $\alpha_{i_0} = \alpha_{j_0}$.

(2.2.1.) Zuerst betrachten wir den Fall, daß

$$\{\alpha_1,\ldots, \alpha_{j_0-1}\} \subset \{\beta_1,\ldots, \beta_m\}.$$

Nach Definition von j_0 gilt für $i,j \in \{1,\dots, j_0 - 1\}$, $i \neq j$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ und deshalb ist $m \geq j_0 - 1$.

Wir nehmen o.E. für $k \in \{1,\dots, j_0 - 1\}$ $\alpha_k = \beta_k$ an.

Wir wenden nun Lemma (4.4.3. b) auf $\Gamma_1,\dots, \Gamma_{j_0-1}$, $\alpha_1,\dots, \alpha_{j_0-1}$, A und f_{j_0} an. ($n = j_0 - 1$ in Lemma (4.4.3. b), $j - 1 \geq 2$ nach Definition von j_0).

Dazu bemerken wir, daß

a) $A \in \mathfrak{g}(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})$,

b) $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i,j \in \{1,\dots, j_0 - 1\}$,

c) $\alpha_k = \beta_k$ für $k \in \{1,\dots, j_0 - 1\}$.

Also ist Lemma (4.4.3. b) anwendbar.

Setzt man $\bar{A} := \bigcap_{k=j_0}^{m} A_{p_k}^{\beta_k}$, so existieren nach Lemma (4.4.3. b)

$$C,D \in \Sigma\Big((\Gamma_{j_0-1} \cup \{\alpha_{j_0-1}\}) \setminus \Big(\bigcup_{k=j_0}^{m} \{\beta_k\} \cup \{\alpha_{i_0}\}\Big)\Big), \quad C \cap D = \emptyset$$

derart, daß für alle $\bar{f} \in L_1(D_{\lambda_0},X)$ gilt:

$$(11) \quad I_A\big((\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)})\dots(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_{j_0-1} \cup \{\alpha_{j_0-1}\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_{j_0-1})})(\bar{f})\big) =$$

$$2^{-(j_0-1)}\Big(I_{\bar{A} \cap ((A_{p_{i_0}}^{\alpha_{i_0}} \cap C) \cup (A_{q_{i_0}}^{\alpha_{i_0}} \cap D))} - I_{\bar{A} \cap ((A_{p_{i_0}}^{\alpha_{i_0}} \cap D) \cup (A_{q_{i_0}}^{\alpha_{i_0}} \cap C))}\Big)(\bar{f}) \qquad \text{(dabei ist } q_{i_0} \in \{0,1\},\ q_{i_0} \neq p_{i_0}\text{)}.$$

Für $\bar{f} := f_{j_0}$ erhält man aus (11):

$$(12) \quad I_A(f_1) = 2^{-(j_0-1)}\Big(I_{\bar{A} \cap ((A_{p_{i_0}}^{\alpha_{i_0}} \cap C) \cup (A_{q_{i_0}}^{\alpha_{i_0}} \cap D))} - I_{\bar{A} \cap ((A_{p_{i_0}}^{\alpha_{i_0}} \cap D) \cup (A_{q_{i_0}}^{\alpha_{i_0}} \cap C))}\Big)(f_{j_0}).$$

Wir haben, da $C \cap D = \emptyset$ ist:

$$(13)\quad (I_{\bar{A}\cap((A^{\alpha_{i_0}}_{p_{i_0}}\cap C)\cup(A^{\alpha_{i_0}}_{q_{i_0}}\cap D))} - I_{\bar{A}\cap((A^{\alpha_{i_0}}_{p_{i_0}}\cap D)\cup(A^{\alpha_{i_0}}_{q_{i_0}}\cap C))})(f_{j_0}) =$$

$$(I_{A^{\alpha_{i_0}}_{p_{i_0}}\cap\bar{A}\cap C} + I_{A^{\alpha_{i_0}}_{q_{i_0}}\cap\bar{A}\cap D} - I_{A^{\alpha_{i_0}}_{p_{i_0}}\cap\bar{A}\cap D} - I_{A^{\alpha_{i_0}}_{q_{i_0}}\cap\bar{A}\cap C})(f_{j_0}).$$

Wir wenden nun auf jeden Term in der letzten Zeile Lemma (4.4.2.) an. Dabei seien in Lemma (4.4.2.) $\Gamma := \Gamma_{j_0}$, $\alpha := \alpha_{j_0} = \alpha_{i_0}$. Da die β_k paarweise verschieden sind, $\alpha_{i_0} = \beta_{i_0}$ $(=\alpha_{j_0})$ hat man:

$\{\beta_{j_0},\ldots,\beta_m\} \subset (\Gamma_1 \cup \{\alpha_1\})\setminus\{\alpha_{j_0}\} \subset (\Gamma_{j_0} \cup \{\alpha_{j_0}\})\setminus\{\alpha_{j_0}\}$ $\alpha_{j_0} \overset{=}{\notin} \Gamma_{j_0}$ Γ_{j_0}. Damit ist $\bar{A} \in \Sigma(\Gamma_{j_0})$. Weil $(\Gamma_{j_0-1} \cup \{\alpha_{j_0-1}\}) \subset (\Gamma_{j_0} \cup \{\alpha_{j_0}\})$, ist $C,D \in \Sigma((\Gamma_{j_0} \cup \{\alpha_{j_0}\})\setminus(\bigcup_{k=j_0}^{m}\{\beta_k\} \cup \{\alpha_{i_0}\}))$ $\alpha_{i_0} \overset{=}{\subseteq} \alpha_{j_0}$ $\Sigma(\Gamma_{j_0})$ und es ergibt sich:

$$(14)\quad (I_{A^{\alpha_{i_0}}_{p_{i_0}}\cap(\bar{A}\cap C)} + I_{A^{\alpha_{i_0}}_{q_{i_0}}\cap(\bar{A}\cap D)} - I_{A^{\alpha_{i_0}}_{p_{i_0}}\cap(\bar{A}\cap D)} - I_{A^{\alpha_{i_0}}_{q_{i_0}}\cap(\bar{A}\cap C)})(f_{j_0})$$

$$= \tfrac{1}{2}(I_{A^{\alpha_{i_0}}_{p_{i_0}}\cap\bar{A}\cap C} - I_{A^{\alpha_{i_0}}_{q_{i_0}}\cap\bar{A}\cap C} + I_{A^{\alpha_{i_0}}_{q_{i_0}}\cap\bar{A}\cap D} - I_{A^{\alpha_{i_0}}_{p_{i_0}}\cap\bar{A}\cap D} -$$

$$I_{A^{\alpha_{i_0}}_{p_{i_0}}\cap\bar{A}\cap D} + I_{A^{\alpha_{i_0}}_{q_{i_0}}\cap\bar{A}\cap D} - I_{A^{\alpha_{i_0}}_{q_{i_0}}\cap\bar{A}\cap C} + I_{A^{\alpha_{i_0}}_{p_{i_0}}\cap\bar{A}\cap C})(f_{j_0+1})$$

$$= (I_{\bar{A}\cap(A^{\alpha_{i_0}}_{p_{i_0}}\cap C)} + I_{\bar{A}\cap(A^{\alpha_{i_0}}_{q_{i_0}}\cap D)} - I_{\bar{A}\cap(A^{\alpha_{i_0}}_{p_{i_0}}\cap D)} - I_{\bar{A}\cap(A^{\alpha_{i_0}}_{q_{i_0}}\cap C)})(f_{j_0+1})$$

Setzt man (14) in (13) und anschließend (13) in (12), so sieht man zusammenfassend:

$$I_A(f_1) = 2^{-(j_0-1)}(I_{\bar{A}\cap((A^{\alpha_{i_0}}_{p_{i_0}}\cap C)\cup(A^{\alpha_{i_0}}_{q_{i_0}}\cap D))}$$

$$- I_{\bar{A}\cap((A^{\alpha_{i_0}}_{p_{i_0}}\cap D)\cup(A^{\alpha_{i_0}}_{q_{i_0}}\cap C))})(f_{j_0+1})$$

$$= I_A\big((\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1\cup\{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)})\ldots$$

$$\ldots(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_{j_0-1}\cup\{\alpha_{j_0-1}\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_{j_0-1})})(f_{j_0+1})\big)$$

(man setze in (11) $\bar{f} := f_{j_0+1}$)

$$= I_A\big((\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1\cup\{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)})\ldots$$

$$\ldots(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_{j_0-1}\cup\{\alpha_{j_0-1}\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_{j_0-1})})$$

$$(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_{j_0+1}\cup\{\alpha_{j_0+1}\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_{j_0+1})})\ldots$$

$$\ldots(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n\cup\{\alpha_n\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_n)})(f)\big) .$$

Damit ist die Anzahl der Faktoren $(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_i\cup\{\alpha_i\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_i)})$ $(i \in \{1,\ldots, n\})$ verringert, und die Induktionsannahme ist auf den Fall (2.2.1.) anwendbar.

(2.2.2.) Es gibt ein $i \in \{1,\ldots, j_0 - 1\}$, so daß $\alpha_i \notin \{\beta_1,\ldots, \beta_m\}$.

Dann folgt mit Lemma (4.4.3. a):

$$I_A(f_1) = I_A\big((\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1\cup\{\alpha_1\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_1)})\ldots$$

$$\ldots(\mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_{j_0-1}\cup\{\alpha_{j_0-1}\})} - \mathbb{E}_{\Sigma(\Gamma_{j_0-1})})(f_{j_0})\big) = 0$$

(dabei wende man Lemma (4.4.3. a) auf $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_{j_0-1}$, $\alpha_1,\ldots, \alpha_{j_0-1}$, A und f_{j_0} an; man beachte, daß für $i,j \in \{1,\ldots, j_0 - 1\}$, $i \neq j$ $\alpha_i \neq \alpha_j$ gilt).

Damit ist (4.4.4.) vollständig bewiesen, und der 3. Schritt zum Beweis des Hauptsatzes ist abgeschlossen. □

(4.5.) Der Beweis des Hauptsatzes für einen Maßraum (S,Σ,μ) gemäß (1.3.3.5.).

Wir wollen in diesem Abschnitt den Beweis des Hauptsatzes (4.1.1.) abschließen. Wir gehen dabei in zwei Schritten vor.

1. Schritt: Hier sei (S,Σ,μ) ein endlicher und positiver Maßraum. Nach Lemma (4.1.2.) gibt es paarweise disjunkte abzählbare Mengen I_1, I_2, Kardinalzahlen m_i $(i \in I_2)$ und eine Isometrie

$$T : L_1(\mu,X) \to \Big(\big(\bigoplus_{i\in I_1} X\big) \oplus \big(\bigoplus_{i\in I_2} L_1(D_{\lambda_i},X)\big)\Big)_{\ell_1(I_1 \cup I_2)}$$

$\{\lambda_i$ die erste Ordinalzahl der Kardinalzahl m_i $(i \in I_2)\}$, die einen

$$\sigma' - \sigma\Big[\Big(\big(\bigoplus_{i\in I_1} X\big) \oplus \big(\bigoplus_{i\in I_2} L_1(D_{\lambda_i},X)\big)\Big)_{\ell_1}, \Big(\big(\bigoplus_{i\in I_1} X'\big) \oplus \big(\bigoplus_{i\in I_2} L_\infty(D_{\lambda_i},X')\big)\Big)_{\ell_\infty}\Big]$$

- Homöomorphismus darstellt.

Für $i \in I_1 \cup I_2$ definieren wir:

$L_i := pr_i\big(T(L)\big)$, $X_i := X$ für $i \in I_1$, $X_i := L_1(D_{\lambda_i},X)$ falls $i \in I_2$,

$Z_i := X'$ für $i \in I_1$ und $Z_i := L_\infty(D_{\lambda_i},X')$ falls $i \in I_2$.

(1) Wir wollen nun zeigen, daß für $i \in I_1 \cup I_2$ L_i eine äquivalente $\sigma(X_i,Z_i) \cap L_i$ - nach unten halbstetige lokal uniform konvexe Norm (bzw. $\sigma(X_i,Z_i) \cap L_i$ - Kadec-Norm) $\|\cdot\|_{1,i}$ besitzt, und daß $K_i > 0$ $(i \in I_1 \cup I_2)$ existieren mit

$K_i \|x_i\|_i \leq \|x_i\|_{1,i} \leq \|x_i\|_i$ für alle $x_i \in L_i$, wobei $\|\cdot\|_i$ die ursprüngliche Norm auf X_i darstellt.

Beweis hierzu:

a) Ist $i \in I_1$, so wissen wir nach Lemma (4.1.2. a) ii)), daß $pr_i(T(L)) = I_{A_i}(L)$ folgt (dabei sei A_i das $i \in I_1$ zugeordnete Atom). Damit haben wir (1) für $i \in I_1$ nach Voraussetzung des Satzes (4.1.1.) (man setze dort $B := \emptyset$).

b) Für $i \in I_2$ seien $B^1, B^2 \in Q_{\lambda_i}$ mit $B^1 \cap B^2 = \emptyset$. Dann wissen wir nach Lemma (4.1.2. b) ii)): Es gibt $A^1, A^2 \in \Sigma$, $A^1 \cap A^2 = \emptyset$ mit $(I_{B^1} - I_{B^2})(pr_i(T(L))) = (I_{A^1} - I_{A^2})(L)$.

Damit erfüllt $pr_i\, T(L)$ die Voraussetzungen des Hauptsatzes bezogen auf den Maßraum $(D_{\lambda_i}, Q_{\lambda_i}, \nu_{\lambda_i})$, denn L erfüllt die Voraussetzungen. Wir erhalten (1) für $i \in I_2$ nach Abschnitt (4.4.).

Wir haben mit (1) die für die Anwendung von Lemma (4.2.4.) nötigen Voraussetzungen. Man setze nun:

$Y := (\bigoplus_{i \in I_1 \cup I_2} X_i)_{\ell_1(I_1 \cup I_2)}$, $Z := (\bigoplus_{i \in I_1 \cup I_2} Z_i)_{\ell_\infty(I_1 \cup I_2)}$ und

$\overline{L} := (\bigoplus_{i \in I_1 \cup I_2} L_i)_{\ell_1(I_1 \cup I_2)}$.

Nach Lemma (4.2.4.) gibt es eine $\sigma(Y,Z) \cap \overline{L}$ - nach unten halbstetige lokal uniform konvexe Norm $|||\cdot|||_T$ (bzw. $\sigma(Y,Z) \cap \overline{L}$ - Kadec-Norm $|||\cdot|||_T$) mit $\frac{1}{2}\|y\|_{\ell_1(I_1 \cup I_2)} \leq |||y|||_T \leq \|y\|_{\ell_1(I_1 \cup I_2)}$ für $y \in \overline{L}$.

Definiert man nun $|||\cdot||| : L \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \longmapsto |||T(f)|||_T ,$$

so ist aufgrund der Isometrie T $|||\cdot|||$ eine $\sigma' \cap L$ - nach unten halbstetige lokal uniform konvexe Norm (bzw. $\sigma' \cap L$ - Kadec-Norm) auf L mit $\frac{1}{2}\|f\|_1 \leq |||f||| \leq \|f\|_1$ für $f \in L$ (man beachte, daß $T_{|L}$ $\sigma' \cap L - \sigma(Y,Z) \cap \overline{L}$ stetig ist).

2. Schritt: Wir lassen nun die Einschränkungen auf einen endlichen Maßraum fallen und beweisen die Aussage des Satzes für einen positiven, nicht notwendig endlichen, Maßraum (S,Σ,μ) gemäß (1.3.3.5).

Dazu wählen wir die maximale Familie $(A_\iota)_{\iota\in I} \subset \Sigma_e$ und die Isometrie $J : L_1(\mu,X) \to (\bigoplus_{\iota\in I} L_1(\mu_{|A_\iota},X))_{\ell_1(I)}$ aus Lemma (2.1.2.).

Wir setzen für $\iota \in I$ $L_\iota := R_{A_\iota}(L)$.

Sind für $\iota \in I$ $A,B \in A_\iota \cap \Sigma \subset \Sigma_e$, $A \cap B = \emptyset$, so gilt $(I_A - I_B)(L_\iota) = (I_A - I_B)(L)$. Nach Voraussetzung existiert auf $(I_A - I_B)(L)$ eine äquivalente lokal uniform konvexe Norm (bzw. äquivalente Kadec-Norm).

Nach dem 1. Schritt wissen wir, daß es für alle $\iota \in I$ auf L_ι eine $\sigma'_{A_\iota} \cap L_\iota$ - nach unten halbstetige lokal uniform konvexe Norm $\|\cdot\|_{1,\iota}$ (bzw. $\sigma'_{A_\iota} \cap L_\iota$ - Kadec-Norm $\|\cdot\|_{1,\iota}$) mit

$\frac{1}{2}\|f\|_{1,A_\iota} \leq \|f\|_{1,\iota} \leq \|f\|_{1,A_\iota}$ $(f \in L_\iota)$ gibt.

Mit Lemma (4.2.4.) findet man dann auf $(\bigoplus_{\iota\in I} L_\iota)_{\ell_1(I)}$ eine $\sigma((\bigoplus_{\iota\in I} L_1(\mu_{|A_\iota},X))_{\ell_1(I)}, (\bigoplus_{\iota\in I} L_\infty(\mu_{|A_\iota},X'))_{\ell_\infty^c(I)}) \cap (\bigoplus_{\iota\in I} L_\iota)_{\ell_1(I)}$ - nach unten halbstetige lokal uniform konvexe Norm $\|\cdot\|_J$

(bzw. $\sigma((\bigoplus_{\iota\in I} L_1(\mu_{|A_\iota},X))_{\ell_1(I)}, (\bigoplus_{\iota\in I} L_\infty(\mu_{|A_\iota},X'))_{\ell_\infty^c(I)}) \cap (\bigoplus_{\iota\in I} L_\iota)_{\ell_1(I)}$ -Kadec-Norm $\|\cdot\|_J$) mit

$\frac{1}{2}\|f\|_{\ell_1(I)} \leq \|f\|_J \leq \|f\|_{\ell_1(I)}$

$(f \in (\bigoplus_{\iota\in I} L_\iota)_{\ell_1(I)})$.

Definiert man nun $|||\cdot||| : L \to \mathbb{R}$

$$f \mapsto \|Jf\|_J ,$$

so ist aufgrund der Isometrie J $|||\cdot|||$ eine $\sigma' \cap L$ - nach unten

halbstetige lokal uniform konvexe Norm (bzw. $\sigma' \cap L$ - Kadec-Norm) mit

$\frac{1}{2}\|f\|_1 \leq |||f||| \leq \|f\|_1$ für $f \in L$

(es ist dabei anzumerken, daß $J_{|L}$ $\sigma' \cap L$ -

$\sigma\big((\bigoplus_{\iota\in I} L_1(\mu_{|A_\iota},X))_{\ell_1(I)}, (\bigoplus_{\iota\in I} L_\infty(\mu_{|A_\iota},X'))_{\ell_\infty^c(I)}\big) \cap (\bigoplus_{\iota\in I} L_\iota)_{\ell_1(I)}$ stetig ist).

Es bleibt noch anzuführen, daß auf $S(L,|||\cdot|||)$ die $\sigma' \cap L$ - und die Normtopologie identisch sind. Falls $|||\cdot|||$ eine $\sigma' \cap L$ - Kadec-Norm ist, so ergibt sich dies aus der Definition (1.2.7.). Ist $|||\cdot|||$ lokal uniform konvex, so erhält man die Gleichheit der $|||\cdot|||$ - und $\sigma' \cap L$ - Topologie auf $S(L,|||\cdot|||)$ nach (1.2.7.7.), da $|||\cdot|||$ $\sigma' \cap L$ - nach unten halbstetig ist.

Der Beweis des Hauptsatzes ist damit abgeschlossen. □

(4.6.) Folgerungen aus dem Hauptsatz

Wir wollen abschließend den Hauptsatz auf spezielle Teilräume von $L_1(\mu,X)$ anwenden. Dabei zeigen wir für $L_1(\mu,X)$ zuerst eine Stabilitätseigenschaft.

(4.6.1.) Korollar: Ist (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.), so existiert auf $L_1(\mu,X)$ genau dann eine σ'-nach unten halbstetige lokal uniform konvexe Norm $|||\cdot|||$ (bzw. σ'-Kadec-Norm) mit

$\frac{1}{2}\|f\|_1 \leq |||f||| \leq \|f\|_1$ für alle $f \in L_1(\mu,X)$,

wenn X lokal uniform konvex renormierbar ist (bzw. eine äquivalente Kadec-Norm besitzt).

In diesem Fall stimmen auf $S(L_1(\mu,X),|||\cdot|||)$ die σ'- und $\|\cdot\|_1$-Topologie überein.

Beweis: "$\Rightarrow$": Wir hatten (S,Σ,μ) als Maßraum gemäß (1.3.3.5.) vorausgesetzt. Damit gibt es ein $A \in \Sigma_e$ mit $\mu(A) > 0$, und die Abbildung

$$T_A : (X,\|\cdot\|) \to (L_1(\mu,X),\|\cdot\|_1)$$

$$x \mapsto \frac{x}{\mu(A)} \chi_A$$

ist eine Isometrie aufs Bild.

Setzt man $|||\cdot|||_x : X \to \mathbb{R}$

$x \mapsto |||Tx|||$, so ist $|||\cdot|||_x$ auf X zu $\|\cdot\|$ eine äquivalente lokal uniform konvexe Norm (bzw. Kadec-Norm).

"$\Leftarrow$": Da für alle $A,B \in \Sigma_e$, $A \cap B = \emptyset$ $(I_A - I_B)(L_1(\mu,X)) \subset X$, folgt diese Richtung sofort aus dem Satz (4.1.1.). □

(4.6.2.) Korollar: Ist (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.) und ist $L \subset L_1(\mu,X)$ ein Teilraum derart, daß für alle $A \in \Sigma_e$ $\overline{I_A(L)}$ schwach kompakt erzeugt ist, dann besitzt L eine äquivalente $\sigma' \cap L$ - nach unten halbstetige lokal uniform konvexe Norm $|||\cdot|||$.
Insbesondere fällt auf $S(L,|||\cdot|||)$ die $\sigma' \cap L$ - mit der Normtopologie zusammen.

Beweis: Für $A,B \in \Sigma_e$, $A \cap B = \emptyset$ sei $\overline{I_A(L)} = \overline{\text{span}}\, K_A$ bzw. $\overline{I_B(L)} = \overline{\text{span}}\, K_B$, wobei $K_A,K_B \subset X$ schwach kompakt sind. Dann ist aber $(I_A - I_B)(L) \subset \overline{\text{span}}(K_A \cup K_B)$. $\overline{\text{span}}(K_A \cup K_B)$ ist erneut schwach kompakt erzeugt und besitzt nach einem Ergebnis von L. Troyanski (vgl. [51, S.177, Th. 1]) eine äquivalente lokal uniform konvexe Norm.
Satz (4.1.1.) liefert sodann die Aussage. □

Mit Hilfe der $\sigma' - \sigma(X,X')$-Stetigkeit des Operators $I_A : L_1(\mu,X) \to X$ erhält man damit sofort:

<u>(4.6.3.) Korollar:</u> Für einen positiven Maßraum gemäß (1.3.3.5.) gilt: Jeder σ'-kompakt erzeugte Teilraum $L \subset L_1(\mu,X)$ besitzt eine $\sigma' \cap L$ - nach unten halbstetige lokal uniform konvexe zu $\|\cdot\|_1$ äquivalente Norm $|||\cdot|||$. Auf $S(L,|||\cdot|||)$ stimmt die $\sigma' \cap L$ -Topologie mit der Normtopologie überein.

Wir wollen dieses Kapitel abschließen, indem wir eine weitere Parallele zu den schwach kompakt erzeugten Banachräumen für σ'-kompakt erzeugte Teilräume aufzeigen. Dazu betrachten wir die $\sigma' \cap L$ - bzw. $\|\cdot\|$ - Borelmengen auf einem σ'-kompakt erzeugten Teilraum L. Die Gleichheit der schwachen und starken Borelmengen auf einem WCG-Banachraum ist wegen [18, S.561, Cor. 2.4] und [51, S.177, Th. 1] bereits bekannt.

<u>(4.6.4.) Korollar:</u> Ist (S,Σ,μ) ein positiver Maßraum gemäß (1.3.3.5.), so fallen auf einem σ'-kompakt erzeugten Teilraum $L \subset L_1(\mu,X)$ die $\sigma' \cap L$ - Borelmengen mit den Normborelmengen zusammen.

<u>Beweis:</u> Wir wählen nach Korollar (4.6.3.) auf L die zu $\|\cdot\|_1$ äquivalente $\sigma' \cap L$ - nach unten halbstetige lokal uniform konvexe Norm $|||\cdot|||$. $B(L,|||\cdot|||)$ ist, da $|||\cdot|||$ $\sigma' \cap L$ - nach unten halbstetig ist, $\sigma' \cap L$ - abgeschlossen und somit ist nach [18, S.561, Th. 2.1.] die Abbildung

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times S(L,|||\cdot|||) &\to L \setminus \{0\} \\ (t,f) &\mapsto t \cdot f \end{aligned}$$

ein Borelisomorphismus von $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times S(L, |||\cdot|||)$ versehen mit der Produkt σ-Algebra $\mathrm{Borel}(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \oplus \mathrm{Borel}\big(S(L, |||\cdot|||), \sigma' \cap S(L, |||\cdot|||)\big)$ nach $L \setminus \{0\}$ versehen mit $\mathrm{Borel}(L \setminus \{0\}, \sigma' \cap L \setminus \{0\})$ (bzw. ein Borelisomorphismus bezüglich der Produkt σ-Algebra $\mathrm{Borel}(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \oplus \mathrm{Borel}\big(S(L, |||\cdot|||), |||\cdot|||\big)$ und $\mathrm{Borel}(L \setminus \{0\}, |||\cdot|||)$).

Nach Korollar (3.2.9.) ist

$\mathrm{id} : \big(S(L, |||\cdot|||), \sigma' \cap S(L, |||\cdot|||)\big) \longrightarrow \big(S(L, |||\cdot|||), |||\cdot|||\big)$ ein Homöomorphismus, so daß also $\tau\tau^{-1} = \mathrm{id}_{|L \setminus \{0\}}$ ein $\mathrm{Borel}(L \setminus \{0\}, \sigma' \cap L \setminus \{0\})$ - -$\mathrm{Borel}(L \setminus \{0\}, |||\cdot|||)$-Isomorphismus ist.

Die Aussage folgt sofort, denn $\{0\}$ ist $\sigma' \cap L$ - abgeschlossen. □

§ 5. Beispiele σ'-kompakt erzeugter Teilräume

Im 2. und 4. Paragraphen haben wir Eigenschaften σ'-kompakt erzeugter Teilräume hergeleitet, die den analogen Aussagen für WCG Banachräume entsprachen. Die nachfolgenden Beispiele sollen nun zeigen, daß es sehr wohl σ'-kompakt erzeugte Teilräume gibt, die nicht WCG, ja nicht einmal schwach Lindelöf sind. Damit lassen sich unsere Resultate nicht unmittelbar aus den schon bekannten Ergebnissen der Banachraumtheorie ableiten. Sämtliche Beispiele sind σ'-kompakt erzeugte Teilräume, die nicht schwach Lindelöf sind.

Das erste Beispiel ist ein σ'-halbreflexiver Teilraum, der isometrisch isomorph zu $\ell_1(\Gamma)$ ist (Γ überabzählbar). Der σ'-kompakt erzeugte Teilraum des 2. Beispieles besitzt keine σ'-kompakte Einheitskugel, denn er enthält c_0 isometrisch (vgl. hierzu (3.17.)).
In [5] wurde ein Beispiel eines σ'-kompakt erzeugten Teilraumes $L = \overline{\text{span}}^{\sigma'} K$ konstruiert mit $\overline{\text{span}}^{\|\cdot\|_1} K \subsetneq L$. Dennoch gibt es eine weitere σ'-kompakte Teilmenge $K_0 \subset L$ mit $\overline{\text{span}}^{\|\cdot\|_1} K_0 = L$. Wir werden im 3. Beispiel zeigen, daß man i.a. zu einem σ'-kompakt erzeugten Teilraum $L \subset L_1(\mu,X)$ keine σ'-kompakte Teilmenge $K_0 \subset L_1(\mu,X)$ mit $L = \overline{\text{span}}^{\|\cdot\|_1} K_0$ finden kann.

Alle Räume $L_1(\mu,X)$ in den Beispielen werden über einen Wahrscheinlichkeitsraum definiert, so daß sich, wie wir schon in den meisten Ergebnissen beobachten konnten, die interessanten Eigenschaften der σ'-Topologie in einem endlichen Maßraum zeigen. Wir setzen im gesamten Paragraphen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ voraus.

Zu Beginn benötigen wir noch einige Hilfsaussagen.

<u>(5.1.) Lemma:</u> Es seien $(\Omega,\mathbb{A},\mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und Y ein Banachraum. Weiter sei

$$\Gamma \subset \Gamma_0 := \{f \in L_1(\mathbb{P},Y);\ \int_\Omega \|f\|\, d\mathbb{P} \leq 1 \text{ und } \int_\Omega f\, d\mathbb{P} = 0\},\ \Gamma \neq \emptyset .$$

Definiert man $S := \Omega^\Gamma$, $\Sigma := \bigotimes_{\gamma\in\Gamma} \mathbb{A}$ und $\mu := \bigotimes_{\gamma\in\Gamma} \mathbb{P}$,

sowie für $s \in S$ und $f \in \Gamma$

$F_f(s) := f(s(f))$, so gilt:

i) $F_f \in L_1(\mu,Y)$, $\|F_f\|_1 \leq 1$.

ii) Sind $T \subset \Gamma$ endlich, $f \in \Gamma \setminus T$, $B \in \bigotimes_{\gamma\in T} \mathbb{A}$ und $C \in \mathbb{A}$, dann gilt für

$$A := B \times C \times \prod_{\substack{\gamma\in\Gamma\setminus T\\ \gamma\neq f}} \Omega \quad \text{und} \quad \bar{A} := B \times \prod_{\gamma\in\Gamma\setminus T} \Omega :$$

$$\int_A F_f\, d\mu = \mu(\bar{A}) \int_C f\, d\mathbb{P} \quad \text{und} \quad \int_A \|F_f\|\, d\mu = \mu(\bar{A}) \int_C \|f\|\, d\mathbb{P} .$$

iii) Ist $\Gamma' \subset \Gamma_1 := \{f \in \Gamma\ ;\ \text{für alle } t \in \Omega : \|f(t)\| \leq 1\}$,

dann ist $K := \{F_f \in L_1(\mu,Y)\ ;\ f \in \Gamma'\} \cup \{0\}$ σ'-kompakt.

Jede Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ von paarweise verschiedenen Elementen ist eine σ'-Nullfolge.

<u>Beweis:</u> i) Es seien $f \in \Gamma$ und $f_k \in \mathcal{E}(\Omega,\mathbb{A},\mathbb{P},Y)$ $(k \in \mathbb{N})$ mit

a) $\|f_k(t)\| \leq \|f(t)\|$ $\mathbb{P}$-f.ü.

b) $f_k(t) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(t)$ $\mathbb{P}$-f.ü. (vgl. 1.3.3.1) 2)) .

Seien $f_k = \sum_{j=1}^{n_k} y_j^k \chi_{B_j^k}$ $(B_i^k \in \mathbb{A}$, $B_i^k \cap B_j^k = \emptyset$ für $i \neq j$, $i,j \in \{1,\dots,n_k\}$ $n_k, k \in \mathbb{N}$, $y_j^k \in Y$, $j \in \{1,\dots,n_k\}$, n_k, $k \in \mathbb{N}$) und

$$A_j^k := B_j^k \times \prod_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ \gamma\neq f}} \Omega \in \Sigma \ (j \in \{1,\dots,n_k\},\ k \in \mathbb{N}) .$$

Dann läßt sich für $k \in \mathbb{N}$ $F_k \in \mathcal{E}(S,\Sigma,\mu,Y)$ definieren:

$$F_k := \sum_{j=1}^{n_k} y_j^k \chi_{A_j^k} \quad (A_j^k \cap A_i^k = \emptyset\ ,\ i \neq j,\ i,j \in \{1,\dots,n_k\},\ n_k \in \mathbb{N})$$

Es sei $N \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(N) = 0$, so daß für alle $t \in \Omega \setminus N$:

a) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\|f_k(t)\| \leq \|f(t)\|$.

b) $f_k(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} f(t)$ in $(Y, \|\cdot\|)$.

Nach Definition des Produktmaßes gilt: $\{s \in S;\ s(f) \in N\}$ ist eine μ-Nullmenge. Sei also $s \in S$, $t := s(f) \notin N$, so ist

$$\|F_f(s) - F_k(s)\| = \|f(t) - f_k(t)\| \quad ,$$

$$F_k \xrightarrow[k\to\infty]{} F_f \quad \mu\text{-f.ü.} \quad \text{und} \quad \|F_k(s)\| = \|f_k(t)\| \leq \|f(t)\| \ .$$

Deshalb erhält man mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesgue:

$$F_f \in L_1(\mu, X) \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} \|F_k - F_f\|_1 = 0 \ ,$$

$$\int_S \|F_k\|\, d\mu = \sum_{j=1}^{n_k} \|y_j^k\|\, \mu(A_j^k) = \sum_{j=1}^{n_k} \|y_j^k\|\, \mathbb{P}(B_j^k)$$

$$= \int_\Omega \|f_k\|\, d\mathbb{P}$$

also $\|F_f\|_1 \leq 1$ (da $\|f\| \leq 1$).

ii) Wir wählen erneut die Folgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus i).

Zu $k \in \mathbb{N}$ setze $\bar{\bar{A}}_j^k := B_j^k \cap C \times \prod_{\gamma \neq f} \Omega$.

$$\int_A F_k\, d\mu = \sum_{j=1}^{n_k} y_j^k\, \mu(A \cap \bar{\bar{A}}_j^k) = \sum_{j=1}^{n_k} y_j^k\, \mu(\bar{A} \cap \bar{\bar{A}}_j^k)$$

$$= \sum_{j=1}^{n_k} y_j^k\, \mu(\bar{A})\mu(\bar{\bar{A}}_j^k) = \mu(\bar{A}) \sum_{j=1}^{n_k} y_j^k\, \mathbb{P}(C \cap B_j^k)$$

$$= \mu(\bar{A}) \int_C f_k\, d\mathbb{P} \quad .$$

Damit gilt natürlich genauso:

$$\int_A \|F_k(s)\|\, d\mu(s) = \mu(\bar{A}) \int_C \|f_k(t)\|\, d\mathbb{P}(t) \quad .$$

Die Konvergenz der einfachen Funktionen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ liefern die gewünschten Gleichungen.

iii) Wir zeigen zunächst:

Für alle $g \in L_\infty(\mu,X)$ gilt:

(1) $(\langle F_f, g\rangle)_{f\in\Gamma'} \in c_0(\Gamma')$.

Aufgrund der Definition von F gilt für $s \in S$ $\|F_f(s)\| \leq 1$ $(f \in \Gamma')$.

Somit ist K gleichgradig integrierbar.

Deshalb gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ nach Egorov (vgl. [16, S.96, Th.1]) ein $g_\varepsilon \in \mathbb{E}(S,\Sigma,\mu,X')$ mit $\sup\limits_{f\in\Gamma'} |\langle F_f, g - g_\varepsilon\rangle| < \varepsilon$. Also brauchen wir (1) nur für $g \in \mathbb{E}(S,\Sigma,\mu,X')$ nachzuweisen, was äquivalent ist zu

(2) $(\langle F_f, x'\chi_A\rangle)_{f\in\Gamma'} \in c_0(\Gamma')$ für $x' \in X'$ und $A \in \Sigma$.

Wegen der Dichtheit des Systems der Zylindermenge $\mathcal{Z} \subset \Sigma$ bezüglich $d\mu$ (vgl. (1.3.1.8.)) genügt es (2) für $A \in \mathcal{Z}$ zu zeigen.

Sind $A = B \times \prod\limits_{\gamma\in\Gamma\setminus T} \Omega$, wobei $T \subset \Gamma$ endlich ist, und $B \in \bigotimes\limits_{\gamma\in T} \mathcal{A}$, so gilt für alle $f \in \Gamma' \setminus T$ nach Teil ii) (man setze dort $C := \Omega$):

$$\int_A F_f \, d\mu = 0.$$

Also gilt:

$$\langle F_f, x'\chi_A\rangle \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } f \in \Gamma'.$$

Somit können wir, wenn man $L := \overline{\operatorname{span}}^{\sigma'} K$ setzt, den folgenden linearen beschränkten ($\|F_f\| \leq 1$ für $f \in \Gamma'$) Operator definieren:

$$T : L^\times \to c_0(\Gamma')$$
$$g \mapsto (\langle F_f, g\rangle)_{f\in\Gamma'} \quad .$$

Dann gilt:

$T^*(\ell_1(\Gamma')) \subset L$, denn sei $b = (b_f)_{f\in\Gamma'} \in \ell_1(\Gamma')$, so hat man $\sum\limits_{f\in\Gamma'} b_f F_f \in L$. Somit läßt sich für $g \in L^\times$ feststellen:

$$\langle g, T^*b\rangle = \langle Tg, b\rangle = \langle b, (\langle F_f, g\rangle)_{f\in\Gamma'}\rangle$$
$$= \sum_{f\in\Gamma'} b_f \langle F_f, g\rangle = \langle \sum_{f\in\Gamma'} b_f F_f, g\rangle .$$

Also ist $T^*(\ell_1(\Gamma')) \subset L$ und T^* ist $\sigma(\ell_1(\Gamma), c_0(\Gamma)) - \sigma(L, L^\times)$-stetig. Ist e_{f_0} $(f_0 \in \Gamma')$ ein Einheitsvektor in $\ell_1(\Gamma')$, so haben wir für $g \in L^\times$: $\langle T^*(e_{f_0}), g\rangle = \langle e_{f_0}, Tg\rangle = \langle F_{f_0}, g\rangle$, d.h. $T^*(e_{f_0}) = F_{f_0}$. Aus der Stetigkeit von T^* folgt: K ist σ'-kompakt und für eine Folge paarweise verschiedener Elemente $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Gamma'$ gilt $F_{f_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\sigma'} 0$. □

<u>(5.2.) Lemma:</u> Es sei $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum derart, daß $A, B \in \mathbb{A}$ existieren mit $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ und $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$. Ferner sei X ein Banachraum und Λ eine unendliche Menge, so daß es eine Isometrie aufs Bild $I : \ell_1(\Lambda) \to X$ gibt. Wir wählen Γ_0 aus Lemma 5.1. und zwei Mengen $A_1, A_2 \in \mathbb{A}$ mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$ und $\Omega = A_1 \cup A_2$. Dann definieren wir:

$$\Gamma_2 := \{f \in \Gamma_0 ;\ f = f_\lambda := I(e_\lambda)\chi_{A_1} - I(e_\lambda)\chi_{A_2},\ \lambda \in \Lambda\}$$

und bilden für eine Teilmenge $\Gamma' \subset \Gamma_0$ mit $\Gamma_2 \subset \Gamma'$ den Maßraum

$$S := \Omega^{\Gamma'},\ \Sigma := \bigotimes_{\gamma\in\Gamma'} \mathbb{A},\ \mu := \bigotimes_{\gamma\in\Gamma'} \mathbb{P} .$$

Für $f \in \Gamma'$ sei F_f wie in Lemma (5.1.) definiert. Dann gilt für eine Projektion $P : X \to X$ mit $X_0 := P(X)$ und $I(\ell_1(\Lambda)) \subset X_0$:

i) Es gibt ein $G \in L_1(\mu, X_0)'$, so daß für alle $f \in \Gamma_2$: $\langle P \circ F_f, G\rangle = 1$.

ii) Für alle $\lambda \in \Lambda$ existiert ein $g_\lambda \in B(L_\infty(\mu, X_0'))$, so daß für alle $\lambda' \in \Lambda$ $\langle F_{f_{\lambda'}}, g_\lambda\rangle = \delta_{\lambda',\lambda}$ gilt. Falls $X_0 = I(\ell_1(\Lambda))$ ist, folgt für jede endliche Teilmenge $J \subset \Lambda$ $\|\sum_{f\in J} \varepsilon_\lambda g_\lambda\|_{L_\infty(\mu, X_0')} \leq 1$ (wobei $\varepsilon_\lambda \in \{-1, 1\}$, $\lambda \in J$).

Beweis: i) Für $s \in S$ und $\lambda \in \Lambda$ definiere man

$$b_s(\lambda) := \begin{cases} 1 & \text{falls } s(f_\lambda) \in A_1 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und}$$

setze $b_s := (b_s(\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$. Weiter sei $Y := I(\ell_1(\Lambda))$. Wir weisen nach, daß folgende Funktion

$$\tilde{G} : S \to Y'$$
$$s \mapsto I^{*-1}(b_s) \quad w^*\text{-meßbar ist.}$$

Dazu zeigen wir, daß die Funktion

$$\overline{G} : S \to \ell_\infty(\Lambda)$$
$$s \mapsto b_s \qquad w^*\text{-meßbar ist,}$$

denn die w^*-w^*-Stetigkeit von I^{*-1} impliziert dann die w^*-Meßbarkeit von $\tilde{G}$. Hierzu muß man für alle $a \in \ell_1(\Lambda)$ die Existenz einer Folge einfacher Funktionen $h_n : S \to \mathbb{R}$ mit für alle $s \in S$ $h(s) \xrightarrow[n \to \infty]{} \langle \overline{G}(s), a \rangle$ nachweisen.

Zu $a \in \ell_1(\Lambda)$ setze man $E(a) := \{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \neq 0\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ und für $n \in \mathbb{N}$ $E_n := \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Ferner sei $A_n^\circ := \{s \in S;\, s(f_\lambda) \notin A_1,\ \lambda \in E_n\}$, und für ein Tupel $(j_1, \dots, j_k) \subset \{1, \dots, n\}$ (die j_i der Größe nach geordnet; $k \in \{1, \dots, n\}$) sei

$$A_n^{(j_1,\dots,j_k)} := \{s \in S \,;\, s(f_{\lambda_i}) \in A_1,\ i \in \{j_1, \dots, j_k\},\ s(f_{\lambda_m}) \notin A_1$$
$$\text{für } m \in \{1, \dots, n\},\ m \notin \{j_1, \dots, j_k\}\}$$

Die Mengen $A_n^\circ, A_n^{(j_1,\dots,j_k)}$ $\big((j_1, \dots, j_k) \subset \{1, \dots, n\},\ k \in \{1, \dots, n\}\big)$ bilden für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Partition von S.

Wir definieren nun $h_n : S \to \mathbb{R}$ mit

$$h_n(s) := \sum_{\lambda \in E_n} -a_\lambda \chi_{A_n^\circ}(s) + \sum_{j=1}^{n} \left(a_{\lambda_j} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{\lambda_i} \right) \chi_{A_n^j}(s)$$
$$+ \sum_{\substack{(j_1,j_2) \subset \{1,\dots,n\} \\ j_1 < j_2}} \left(a_{\lambda_{j_1}} + a_{\lambda_{j_2}} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1 \\ i \neq j_2}}^{n} a_{\lambda_i} \right) \chi_{A_n^{(j_1,j_2)}}(s) + \dots$$
$$+ \sum_{\lambda \in E_n} a_\lambda \chi_{A_n^{(1,\dots,n)}}(s) .$$

Es gilt: (*) $h_n(s) = \sum_{\lambda \in E_n} a_\lambda \, \overline{G}(s)(\lambda)$, denn für $s \in S$ gibt es genau ein

$A_n^{(j_1,\dots,j_k)}$ (bzw. A_n°) mit $s \in A_n^{(j_1,\dots,j_k)}$ (bzw. $s \in A_n^\circ$).

Nach Definition haben wir $s(f_{\lambda_{j_i}}) \in A_1$ für $i \in \{1,\dots,k\}$, $k \in \{0,\dots,n\}$

und $s(f_{\lambda_m}) \notin A_1$ für $m \in \{1,\dots,n\}$, $m \notin \{j_1,\dots,j_k\}$.

Beachtet man nun die Definition von $\overline{G}$, d.h.

$$\overline{G}(s)(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{für } s(f_\lambda) \in A_1 \\ -1 & \text{für } s(f_\lambda) \notin A_1 \end{cases},$$

so folgt (*) nach Konstruktion von h_n.

Wir wissen, daß für alle $s \in S$ $\|\overline{G}(s)\|_{\ell_\infty(\Lambda)} = 1$ ist.

Die Eigenschaft von $a \in \ell_1(\Lambda)$ impliziert zu einem vorgegebenem $\varepsilon > 0$:

Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$

$$\sum_{\lambda \in E(a) \setminus E_n} |a_\lambda| < \varepsilon .$$

Somit folgt für alle $s \in S$ und $n \geq n_0$

$$|\langle \overline{G}(s), a\rangle - \langle h_n(s)\rangle| \leq |\sum_{\lambda \in E_n} \overline{G}(s)(\lambda)\, a_\lambda - h_n(s)| +$$

$$|\sum_{\lambda \in E(a) \setminus E_n} \overline{G}(s)(\lambda) a_\lambda| \underset{n.(*)}{\leq} \sum_{\lambda \in E(a) \setminus E_n} |a_\lambda| < \varepsilon .$$

Nach Definition von $\tilde{G}$ gilt für $s \in S$:

$\|\tilde{G}(s)\| = 1$, also $\tilde{G} \in L_1(\mu, Y)'$ (vgl. [29, S.94, Th.7]).

Sind nun $\lambda \in \Lambda$ und $s \in S$ mit $s(f_\lambda) \in A_i$ $(i = 1,2)$, so hat man

$$\begin{aligned} \langle F_{f_\lambda}(s), \tilde{G}(s)\rangle &= \langle F_{f_\lambda}(s), I^{*-1}(b_s)\rangle \\ &= \langle (-1)^{i+1} I(e_\lambda), I^{*-1}(b_s)\rangle \\ &= \langle (-1)^{i+1} e_\lambda, b_s\rangle = 1 . \end{aligned}$$

Für $s(f_\lambda) \in A_1 \cup A_2$ gilt: $\langle F_{f_\lambda}(s), \tilde{G}(s)\rangle = 1$.

Nun ist $\{s \in S ; s(f_\lambda) \notin (A_1 \cup A_2)\}$ eine μ-Nullmenge, so daß

$\langle F_{f_\lambda}, \tilde{G}\rangle = \langle P \circ F_{f_\lambda}, \tilde{G}\rangle = 1$ gilt. Nach Hahn-Banach läßt sich $\tilde{G}$ zu $G \in L_1(\mu, X_0)'$ fortsetzen mit $G_{|L_1(\mu,Y)} = \tilde{G}$ und $\|G\|_{L_1(\mu,X_0)'} = \|\tilde{G}\|_{L_1(\mu,Y)'}$.

ii) Zu $\lambda \in \Lambda$ definiere man:

$$A_\lambda^1 := \{s \in S\,;\, s(f_\lambda) \in A_1\}$$

$$A_\lambda^2 := \{s \in S\,;\, s(f_\lambda) \in A_2\}$$

Dann ist $A_\lambda^1 \cap A_\lambda^2 = \emptyset$ und $\mu(A_\lambda^1) = \mu(A_\lambda^2) = \frac{1}{2}$, $\mu(A_\lambda^1 \cup A_\lambda^2) = 1$.

Bezeichnet für $\lambda \in \Lambda$ e_λ^∞ den Einheitsvektor in $\ell_\infty(\Lambda)$, so ist $I^{*-1}(e_\lambda^\infty) \in Y'$. Da $Y \overset{1}{\hookrightarrow} X_0$ nach Voraussetzung eingebettet ist, findet man eine Hahn-Banach-Fortsetzung c_λ von $I^{*-1}(e_\lambda^\infty)$ mit $\|c_\lambda\| = 1$ und $\langle e_{\lambda'}, I^* \circ \iota^*(c_\lambda)\rangle = \langle I(e_{\lambda'}), c_\lambda\rangle = \delta_{\lambda',\lambda}$ $(\lambda, \lambda' \in \Lambda)$.

Setzt man $g_\lambda := c_\lambda \chi_{A_\lambda^1} - c_\lambda \chi_{A_\lambda^2}$, so folgt

$$\langle F_{f_\lambda}, g_\lambda\rangle = \int_S \langle f_\lambda(s(f_\lambda)), g_\lambda(s)\rangle \, d\mu(s)$$

$$= \int_S \langle I(e_\lambda), c_\lambda\rangle \chi_{A_\lambda^1} + \langle I(e_\lambda), c_\lambda\rangle \chi_{A_\lambda^2} \, d\mu = 1 .$$

Für $\lambda' \neq \lambda$ hat man:

$$\langle F_{f_{\lambda'}}, g_\lambda\rangle = \int_S \langle f_{\lambda'}, (s(f_{\lambda'}))\rangle, g_\lambda(s)\rangle \, d\mu(s)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} \int_S (-1)^{i+j} \langle I(e_{\lambda'}), c_\lambda\rangle \chi_{A_\lambda^i \cap A_\lambda^j} \, d\mu = 0 .$$

Ist nun $X_0 = Y$, so ergibt sich für $\lambda \in \Lambda$ $c_\lambda = I^{*-1}(e_\lambda^\infty)$, und für endliches $J \subset \Lambda$ und $s \in S$ folgt:

$$\|\sum_{\lambda \in J} \varepsilon_\lambda g_\lambda(s)\|_{X_0'} = \|\sum_{\lambda \in J} \varepsilon_\lambda I^{*-1}(e_\lambda)\| = 1 \quad (\varepsilon_\lambda \in \{-1,1\} \text{ für } \lambda \in J);$$

und ii) ist gezeigt. □

Wir haben bis jetzt einige Eigenschaften über σ'-kompakt erzeugte Teilräume angegeben, ohne zu wissen, ob nicht zu jedem σ'-kompakt erzeugten Teilraum

L ein schwach kompakt erzeugter Oberraum $L \subset \tilde{L} \subset L_1(\mu,X)$ existiert. Die nachfolgenden Beispiele sind σ'-kompakt erzeugte Teilräume, die nicht einmal schwach Lindelöf sind (und damit nicht WCG, vgl. [18, S.564]).

<u>(5.3.) Beispiel:</u> Es sei $(\Omega,\mathbb{A},\mathbb{P}) := (\{0,1\}, \mathrm{Pot}(\{0,1\}), \nu)$, wobei $\nu(\{0\}) = \nu(\{1\}) = \frac{1}{2}$ ist.

Ferner sei Λ eine Menge der Kardinalität $> \aleph_0$ und $X := \ell_1(\Lambda)$.

Man betrachte für $\lambda \in \Lambda$ $f_\lambda := e_\lambda \chi_{\{0\}} - e_\lambda \chi_{\{1\}}$ ($\{e_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ ist die Menge der Einheitsvektoren). Wir wählen die Menge Γ_0 aus Lemma 5.1 und setzen

$\Gamma_2 := \{f_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ (vgl. Lemma 5.1.).

Weiter definieren wir:

$$S := \Omega^{\Gamma_0}, \quad \Sigma = \bigotimes_{f\in\Gamma_0} \mathbb{A} \quad \text{und} \quad \mu := \bigotimes_{f\in\Gamma_0} \mathbb{P}.$$

Bildet man für $\lambda \in \Lambda$ F_{f_λ} wie in Lemma (5.1.), so ist $F_{f_\lambda} \in L_1(\mu,X)$ (vgl. Lemma (5.1. i)), und $K := \{F_{f_\lambda} ; \lambda \in \Lambda\} \cup \{0\}$ ist σ'-kompakt nach Lemma (5.1. iii)) $(\Gamma' := \Gamma_2)$.

Wir setzen nun $L := \overline{\mathrm{span}}^{\|\cdot\|} K$.

I) Es gibt eine Isometrie $T : \ell_1(\lambda) \to L$:

Man definiere zu $\sum_{n=1}^{m} a_n e_{\lambda_n} \in \ell_1(\Lambda)$:

$$T\left(\sum_{n=1}^{m} a_n e_{\lambda_n}\right) := \sum_{n=1}^{m} a_n F_{f_{\lambda_n}}$$

Zu einem m-Tupel $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m) \in \{0,1\}^m$ sei

$A_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m} := \{s \in S ; s(f_{\lambda_i}) = \varepsilon_i, i = 1,\ldots,m\}$ gesetzt,

dann sind die Mengen $A_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m}$ $((\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m) \in \{0,1\}^m)$ paarweise

disjunkt und überdecken ganz S.

$$\|T(\sum_{n=1}^{m} a_n e_{\lambda_n})\|_1 = \|\sum_{n=1}^{m} a_n F_{f_{\lambda_n}}\|_1 = \int_S \|\sum_{n=1}^{m} a_n F_{f_{\lambda_n}}(s)\|_{\ell_1(\Lambda)} \, d\mu(s)$$

$$= \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)} \int_{A_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m}} \|\sum_{n=1}^{m} a_n F_{f_{\lambda_n}}(s)\|_{\ell_1(\Lambda)} \, d\mu(s)$$

$$= \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)} \int_{A_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m}} \|\sum_{n=1}^{m} (-1)^{\varepsilon_n} a_n e_{\lambda_n}\|_{\ell_1(\Lambda)} \, d\mu(s)$$

$$= \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)} \|\sum_{n=1}^{m} (-1)^{\varepsilon_n} a_n e_{\lambda_n}\|_{\ell_1(\Lambda)} \, 2^{-m}$$

$$= \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)} (\sum_{n=1}^{m} |a_n| \, 2^{-m}) = \sum_{n=1}^{m} |a_n| \, .$$

Nun ist also T auf einem dichten Teilraum von $\ell_1(\Lambda)$ eine Isometrie auf einen dichten Teilraum von L. Damit läßt sich aber T zu einer Isometrie $T : \ell_1(\Lambda) \to L$ fortsetzen.

II) T ist $\sigma(\ell_1(\Lambda), c_0(\Lambda))$ - $\sigma(L, L^\times)$ - stetig :

Dazu zeigen wir, daß für die Adjungierte T^* gilt: $T^*(L^\times) \subset c_0(\Lambda)$.

Da $\mathrm{span}(e_\lambda ; \lambda \in \Lambda)$ dicht in $\ell_1(\Lambda)$ liegt, weisen wir nach: Es gibt zu jedem $g \in L^\times$ ein $b \in c_0(\Lambda)$, so daß für alle $\lambda \in \Lambda$

$$\langle Te_\lambda , g\rangle = \langle e_\lambda , b\rangle \quad \text{gilt.}$$

Nach dem Beweis zu Lemma (5.1.iii)) hat man $(\langle F_{f_\lambda} , g\rangle)_{\lambda\in\Lambda} \in c_0(\Lambda)$ für $g \in L^\times$. Ist nun $g \in L^\times$, so definiere man

$$b := (\langle F_{f_{\lambda'}} , g\rangle)_{\lambda'\in\Lambda} \quad .$$

Somit erhält man für $\lambda \in \Lambda$:

$$\langle Te_\lambda , g\rangle = \langle F_{f_\lambda} , g\rangle = \langle e_\lambda , b\rangle \quad .$$

Die Aussage folgt mit (1.2.2.).

III) Die Einheitskugel $B(L)$ ist σ'-kompakt. Es gilt aufgrund von I):

$$T\big(B(\ell_1(\Lambda))\big) = B(L)$$

Nun folgt aus der $\sigma\big(\ell_1(\Lambda), c_0(\Lambda)\big) - \sigma(L,L^\times)$ - Stetigkeit von T, daß $B(L)$ σ'-kompakt ist.

IV) Nach III) ist L σ'-halbreflexiv und mit 3.17. σ'-abgeschlossen. Damit besitzt L auch die RNP.

V) Gegenüberstellung einiger Eigenschaften von L in der σ'- bzw. schwachen Topologie:

L ist σ'-kompakt erzeugt, σ'-κ-analytisch und somit ein σ'-Lindelöf-Raum (vgl. [5, S.14, Prop. 2]). Nach I) ist L isometrisch isomorph zu $\ell_1(\Lambda)$. Nun ist $\ell_1(\Lambda)$ nach [18, S.575, 1a] nicht schwach Lindelöf, da wir $\operatorname{card}\Lambda > \aleph_0$ vorausgesetzt haben. Dann kann L nicht schwach Lindelöf, damit nicht schwach κ-analytisch und insbesondere nicht schwach kompakt erzeugt sein. □

Das nächste Beispiel gibt einem σ'-kompakt erzeugten Teilraum an, der nicht schwach Lindelöf ist und eine nicht σ'-kompakte Einheitskugel besitzt.

<u>(5.4.) Beispiel:</u> Es sei wieder $(\Omega,\mathbb{A},\mathbb{P}) := \big(\{0,1\}, \operatorname{Pot}(\{0,1\}), \nu\big)$, wobei $\nu(\{0\}) = \nu(\{1\}) = 1/2$.

Ferner seien $\tilde{\Lambda}$ unendliche Mengen und $X := \ell_\infty(\tilde{\Lambda})$. Man betrachte die Mengen Γ_0 und Γ_1 aus Lemma (5.1.) und definiere

$$S := \Omega^{\Gamma_0}, \quad \Sigma := \bigotimes_{f\in\Gamma_0} \mathbb{A}, \quad \mu := \bigotimes_{f\in\Gamma_0} \mathbb{P}.$$

Wir bilden zu $f \in \Gamma_0$ F_f wie in Lemma (5.1.) und $K := \{F_f ; f \in \Gamma_1\} \cup \{0\}$.

K ist nach Lemma (5.1. iii)) σ'-kompakt. Man setze $L := \overline{\mathrm{span}}^{\sigma'} K$.

I) Es gibt eine isometrische Einbettung $T : c_0(\tilde{\Lambda}) \to L$. Zu $\lambda \in \tilde{\Lambda}$ definiere man $f_\lambda := e_\lambda \chi_{\{0\}} - e_\lambda \chi_{\{1\}}$ $\big((e_\lambda)_{\lambda\in\tilde{\Lambda}}$ bezeichne die Einheitsvektoren in $c_0(\tilde{\Lambda})\big)$, dann ist $f_\lambda \in \Gamma_1$. Wir definieren für $\sum_{n=1}^{m} a_n e_{\lambda_n} \in \mathrm{span}(e_\lambda ; \lambda \in \tilde{\Lambda})$:

$$T\Big(\sum_{n=1}^{m} a_n e_{\lambda_n}\Big) := \sum_{n=1}^{m} a_n F_{f_{\lambda_n}} .$$

Wie in Beispiel (5.3.) sei zu $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m) \in \{0,1\}^m$ $A_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m}$ gebildet.

$$\begin{aligned}
\Big\|T\Big(\sum_{n=1}^{m} a_n e_{\lambda_n}\Big)\Big\|_1 &= \Big\|\sum_{n=1}^{m} a_n F_{f_{\lambda_n}}\Big\|_1 = \int_S \Big\|\sum_{n=1}^{m} a_n F_{f_{\lambda_n}}(s)\Big\| \, d\mu(s) \\
&= \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)} \int_{A_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m}} \Big\|\sum_{n=1}^{m} (-1)^{\varepsilon_n} a_n e_{\lambda_n}\Big\| d\mu(s) \\
&= \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)} 2^{-m} \max(|a_{\lambda_n}| ; 1 \le n \le m) \\
&= \max(|a_{\lambda_n}| ; 1 \le n \le m) .
\end{aligned}$$

Nun ist $\mathrm{span}(e_\lambda ; \lambda \in \tilde{\Lambda})$ dicht in $c_0(\tilde{\Lambda})$, so daß also T auf ganz $c_0(\tilde{\Lambda})$ zu einer Isometrie aufs Bild $T : c_0(\tilde{\Lambda}) \to L$ fortsetzbar ist.

II) Nach Korollar (4.6.3.) ist L lokal uniform konvex renormierbar und kann damit nicht ℓ_∞ enthalten (vgl. [13, S.120, Th. 1]).

III) L ist nicht schwach Lindelöf:

Wir zeigen, daß K nicht schwach Lindelöf ist. Ist $\mathrm{card}\, \tilde{\Lambda} = \aleph_0$, so gibt es eine Isometrie aufs Bild $I : \ell_1([0,1]) \to \ell_\infty$ (vgl. Anhang I).

Falls card $\tilde{\Lambda} > \aleph_0$, findet man nach Anhang II) eine Isometrie aufs Bild $I : \ell_1(\tilde{\Lambda}) \to \ell_\infty(\tilde{\Lambda})$. Wir setzen $\Lambda := [0,1]$, falls card $\tilde{\Lambda} = \aleph_0$ und $\Lambda := \tilde{\Lambda}$ sonst und betrachten die Teilmenge $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ aus Lemma (5.2.) $(X_0 := \ell_\infty(\tilde{\Lambda}))$, dann gilt nach Lemma (5.2.):

a) Es gibt ein $G \in L_1(\mu,X)'$, so daß man für alle $\lambda \in \Lambda$ $\langle F_\lambda, G\rangle = 1$ hat.

b) Ferner existiert zu jedem $\lambda \in \Lambda$ ein $g_\lambda \in L_\infty(\mu,X')$, so daß für alle $\lambda' \in \Lambda$ $\langle F_{f_{\lambda'}}, g_\lambda\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}$.

Somit haben wir (*) $\langle F_{f_{\lambda'}}, G - g_\lambda\rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } \lambda' = \lambda \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$.

Die Menge $\tilde{K} := \{F_{f_\lambda} ; \lambda \in \Lambda\} \cup \{0\}$ ist σ'-kompakt nach Lemma (5.1. iii)) (dort setze man $\Gamma' := \Gamma_2$).

$\{\{F \in \tilde{K} ; |\langle F_{f_\lambda} - F, G - g_\lambda\rangle| < 1\}, \lambda \in \Lambda\}$ ist eine offene Oberdekkung der abgeschlossenen Menge $\tilde{K}$, die keine abzählbare Teilüberdekkung wegen (*) besitzt.

IV) Zusammenfassung:

1) L ist σ'-kompakt erzeugt, aber nicht schwach Lindelöf (III).

2) L hat nicht die RNP, da $c_0 \subset L$.

3) L hat keine σ'-kompakte Einheitskugel, denn L besitzt nicht die RNP (vgl. dazu Korollar (3.17.)). □

Wie in [5,S.247] durch ein Beispiel gezeigt wurde, fällt der Normabschluß von span K (mit K σ'-kompakt) im allgemeinen nicht mit den σ'-Abschluß zusammen. Einige Ergebnisse wurden für den $\|\cdot\|_1$-Abschluß hergeleitet (z.B. $\overline{\text{span}}^{\|\cdot\|_1} K$ ist σ'-Lindelöf, vgl. [5,S.248, Prop. 2]) während

andere Ergebnisse sowohl für den $\|\cdot\|_1$, wie für den σ'-Abschluß Gültigkeit besitzen ($\overline{\text{span}}^{\sigma'} K$ ist lokal uniform konvex renormierbar). Daher stellt sich die Frage, ob für jede σ'-kompakte Menge K eine weitere σ'-kompakte Teilmenge $K_0 \subset \overline{\text{span}}^{\sigma'} K$ existiert, so daß $\overline{\text{span}}^{\|\cdot\|_1} K_0 = \overline{\text{span}}^{\sigma'} K$. Das folgende Beispiel soll diese Frage negativ beantworten.

<u>(5.5.) Beispiel:</u> Es seien $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P}) := (]0,1[, \mathcal{L} \cap]0,1[, \lambda|_{]0,1[})$ und

$$\mathbb{R} := \{f \in L_1(\mathbb{P});\ \|f\|_1 = 1,\ \text{für alle } n \in \mathbb{N}: \int_\Omega f \cdot \chi_{|f| \leq n}\, d\mathbb{P} = 0\}$$

Der Satz von der majorisierten Konvergenz impliziert für $f \in \mathbb{R}$

$$\int_\Omega f\, d\mathbb{P} = 0 .$$

Man hat $\text{card}([0,1]) \leq \text{card}(\mathbb{R})$ und $\Lambda := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} (\mathbb{R} \times \{n\})$ ist überabzählbar.

Wir definieren den Banachraum $X := (\ell_1(\Lambda) \oplus \ell_\infty(\mathbb{R}))_\infty$ und folgende Abbildungen (man berücksichtige, daß $\underline{0}$ den Nullvektor in $\ell_1(\Lambda)$ bzw. $\ell_\infty(\mathbb{R})$ darstellt):

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$\kappa^n : \mathbb{R} \to L_1(\mathbb{P}, X)$ mit

$\kappa^n(f) := (e_{(f,n)}, \underline{0})\, \chi_{]0,\frac{1}{2}[} - (e_{(f,n)}, \underline{0})\, \chi_{]\frac{1}{2},1[}$ und

$\tau : \mathbb{R} \to L_1(\mathbb{P}, X)$ mit

$\tau(f) := (\underline{0}, e_f) f$.

Setzt man $\Gamma := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \kappa^n(\mathbb{R}) \cup \tau(\mathbb{R})$, so ist $\Gamma \subset \Gamma_0$ mit Γ_0 aus Lemma (5.1.), und man definiere: $S :=]0,1[^\Gamma$, $\Sigma := \bigotimes_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{A}$ und $\mu := \bigotimes_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{P}$.

Ähnlich wie in den vorangegangenen Beispielen (5.3.) und (5.4.) wollen wir nun die σ'-kompakte Teilmenge $K \subset L_1(\mu, X)$ bilden. Zu $f \in \mathbb{R}$ setzen wir gemäß Lemma (5.1.) $F(f) := F_{\kappa^\circ(f)}$, $F_n(f) := F_{\kappa^n(f)}$ $(n \geq 1)$, $H(f) := F_{\tau(f)}$ und für $n \geq 1$ $H_n(f) := H(f)\, \chi_{\|H(f)(\cdot)\| \leq n}$ (Bezeichnung wie in Lemma (5.1.)). Die Funktionen $F(f)$, $F_n(f)$ und $H(f)$ sind nach Lemma (5.1.)

integrierbar mit $\|F(f)\| \leq 1$, $\|F_n(f)\|_1 \leq 1$ und $\|H(f)\|_1 \leq 1$ $(n \geq 1)$.

Setzt man $K := \{\frac{1}{n}(F(f) + H_n(f) - F_n(f)) ; f \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, dann ist K σ'-kompakt.

<u>Beweis:</u> Wir zeigen zuerst, daß für ein festes $n \in \mathbb{N}$ $\tilde{K} := \{F(f) + H_n(f) - F_n(f) ; f \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}$ σ'-kompakt ist. Dazu weisen wir im 1. Schritt nach:

(1) Für alle $g \in L_\infty(\mu,X')$ ist $(\langle F(f) + H_n(f) - F_n(f), g\rangle)_{f\in\mathbb{R}} \in c_0(\mathbb{R})$.

Wir hatten $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt, so daß für alle $s \in S$ und $f \in \mathbb{R}$

(2) $\|F(f)(s) + H_n(f)(s) - F_n(f)(s)\| \leq n + 2$ gilt. Also ist $\tilde{K}$ gleichgradig integrierbar.

Somit existiert zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ nach Egorov (vgl. [16, S.94, Th.1]) ein $g_\varepsilon \in \mathbb{E}(S,\Sigma,\mu,X')$ mit $\sup_{f\in\mathbb{R}} |\langle F(f) + H_n(f) - F_n(f), g\rangle| < \varepsilon$. Deshalb genügt es, (1) für $g \in \mathbb{E}(S,\Sigma,\mu,X')$ nachzuweisen, was äquivalent ist zu:

Für alle $x' \in X'$ und $A \in \Sigma$ ist $(\langle F(f) + H_n(f) - F_n(f), x'\chi_A\rangle)_{f\in\mathbb{R}} \in c_0(\mathbb{R})$.

Wegen der gleichgradigen Integrierbarkeit von $\tilde{K}$ und der Dichtheit des Systems der Zylindermengen $\mathfrak{Z} \subset \Sigma$ (vgl. (1.3.1.8.)) brauchen wir dies nur für $A \in \mathfrak{Z}$ zu zeigen.

Es sei also $A \in \mathfrak{Z}$ mit $A = B \times \prod_{\gamma\in\Gamma\setminus T} \Omega$, wobei $T \subset \Gamma$ endlich und $B \in \bigotimes_{\gamma\in T} \mathbf{A}$ ist. Da T endlich ist, gibt es eine endliche Teilmenge $J \subset \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$ mit o.E. $T = \bigcup_{n=0}^{m} \kappa^n(J) \cup \tau(J)$. Wir zeigen, daß für $f \in \mathbb{R}\setminus J$

$$\int_A F(f)\, d\mu = \int_A F_n(f)\, d\mu = \int_A H_n(f)\, d\mu = 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \text{ gilt.}$$

Denn hieraus folgt sofort

$$(\langle F(f) + H_n(f) - F_n(f), x'\chi_A\rangle)_{f\in\mathbb{R}} =$$
$$= (\langle \int_A F(f) + H_n(f) - F_n(f)\, d\mu, x'\rangle)_{f\in\mathbb{R}} \in c_0(\mathbb{R}).$$

Dazu wenden wir Lemma (5.1.ii)) an.

Sei $f \in \mathbb{R}\setminus J$, dann ist für $n \in \mathbb{N}_0$ $\kappa^n(f) \notin T$ und $\tau(f) \notin T$.

i) Setzen wir für $n \in \mathbb{N}_0$ $\gamma := \kappa^n(f)$, $C := \Omega$, so gilt nach Lemma (5.1. ii)) ($\overline{A} := A$ dort gesetzt):

$$\int_A F(f)\, d\mu = \mu(A) \int_\Omega \kappa^\circ(f)\, d\mathbb{P} = 0 \quad (\text{falls } n = 0) \quad \text{und}$$

$$\int_A F_n(f)\, d\mu = \mu(A) \int_\Omega \kappa^n(f)\, d\mathbb{P} = 0 \quad (\text{für } n \geq 1).$$

ii) Man wähle $n \in \mathbb{N}$. Dann hat man nach Definition $\|H(f)(s)\| \leq n$ genau dann, wenn $\|\tau(f)(s(f))\| \leq n$ $(s \in S)$.

Wir definieren nun $C := \{t \in]0,1[\ ;\ |f(t)| \leq n\}$ und setzen

$$D := B \times C \times \prod_{\substack{\gamma \in \Gamma \setminus T \\ \gamma \neq \tau(f)}} \Omega\,, \quad \overline{D} := B \times \prod_{\substack{\gamma \in \Gamma \setminus T \\ \gamma \neq \tau(f)}} \Omega\,.$$

Es gilt: $\overline{D} = \{s \in S\ ;\ \|\tau(f)(s(f))\| \leq n\} = \{s \in S\ ;\ \|H(f)(s)\| \leq n\}$.

Somit hat man:

$$\int_D H(f)\, d\mu = \int_{A \cap \overline{D}} H(f)\, d\mu = \int_A H(f)\, \chi_{\overline{D}}\, d\mathbb{P} = \int_A H_n(f)\, d\mu\,.$$

Wendet man erneut Lemma (5.1. ii)) an (dort wird $A := D$, $\overline{A} := \overline{D}$ gesetzt), so gilt:

$$\int_D H(f)\, d\mu = \mu(\overline{D}) \int_C \tau(f)\, d\mathbb{P} = \mu(\overline{D}) \int_C (\underline{0}, e_f) f\, d\mathbb{P} = 0$$

nach Definition von D und $f \in \mathbb{R}$.

Im 2. Schritt bilden wir die lineare und beschränkte Abbildung

$$T : (\overline{\text{span}}^{\sigma'}\ \tilde{K})^\times \longrightarrow c_0(\mathbb{R})$$

$$g \longmapsto (\langle F(f) + H_n(f) - F_n(f), g\rangle)_{f \in \mathbb{R}}$$

(nach (1) bildet $T\ (\overline{\text{span}}^{\sigma'}\ \tilde{K})^\times$ nach $c_0(\mathbb{R})$ ab).

Für den adjungierten Operator T^* gilt:

$$T^*(\ell_1(\mathbb{R})) \subset \overline{\text{span}}^{\sigma'}\ \tilde{K}\,.$$

<u>Denn:</u> Ist $b = (b_f)_{f \in \mathbb{R}} \in \ell_1(\mathbb{R})$, so ergibt sich

$$\sum_{f \in \mathbb{R}} b_f\, (F(f) + H_n(f) - F_n(f)) \in \overline{\text{span}}^{\|\cdot\|_1}\ \tilde{K} \subset \overline{\text{span}}^{\sigma'}\ \tilde{K}$$

(dies folgt aus der gleichmäßigen Beschränktheit von $\{F(f)+H_n(f)-F_n(f)\}$ in $(L_1(\mu,X),\|\cdot\|_1)$ und der Eigenschaft der Elemente $(b_f)_{f\in\mathbb{R}} \in \ell_1(\mathbb{R})$).
Für alle $g \in (\overline{\text{span}}^{\sigma'}\ \tilde{K})^\times$ gilt:

$$\begin{aligned}<Tg\,,b> &= \sum_{f\in\mathbb{R}} b_f <F(f)+H_n(f)-F_n(f)\,,g> \\ &= <\sum_{f\in\mathbb{R}} b_f\,(F(f)+H_n(f)-F_n(f))\,,g> \\ &= <g\,,T^*b> \quad .\end{aligned}$$

Damit ist T^* $\sigma(\ell_1(\mathbb{R})\,,c_0(\mathbb{R}))-\sigma((\overline{\text{span}}^{\sigma'}\ \tilde{K}),(\overline{\text{span}}^{\sigma'}\ \tilde{K})^\times)$-stetig und $T^*(B(\ell_1(\mathbb{R})))$ ist σ'-kompakt. Ferner ist $K \subset T^*(B(\ell_1(\mathbb{R})))$, denn sei $f \in \mathbb{R}$ und $g \in (\overline{\text{span}}^{\sigma'}\ K)^\times$:

$$\begin{aligned}<g\,,T^*(e_f)> &= <Tg\,,e_f> \\ &= <(<F(\tilde{f})+H_n(\tilde{f})-F_n(\tilde{f})\,,g>)_{\tilde{f}\in\mathbb{R}}\,,e_f> \\ &= <F(f)+H_n(f)-F_n(f)\,,g>.\end{aligned}$$

Wir können damit feststellen:

(3) $T^*(e_f) = F(f)+H_n(f)-F_n(f)$ und damit ist $\tilde{K}$ σ'-kompakt.

Schließlich zeigen wir jetzt, daß K σ'-kompakt ist: Dazu sei $(F_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ mit $F_k = \frac{1}{n_k}(F(f_k)+H_{n_k}(f_k)-F_{n_k}(f_k))$. Gilt nun $\limsup_{k\to\infty} n_k = \infty$, so gibt es eine Teilfolge $(F_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ derart, daß $F_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{\|\cdot\|_1} 0$ (denn $\|F(f_k)+H_{n_k}(f_k)-F_{n_k}(f_k)\|_1 \leq 3$). Ist $\limsup_{k\to\infty} n_k = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so existiert eine Teilfolge (n_{k_j}) von (n_k) mit $n_{k_j} = n$ für $j \in \mathbb{N}$. Berücksichtigt man (3), so besitzt in den beiden Fällen $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen ein Element in K konvergente Teilfolge.

Wir setzen nun $L := \overline{\text{span}}^{\sigma'}\ K$. Für $f \in \mathbb{R}$ gilt $F(f)+H(f) \in L$, denn nach Definition von $H_n(f)$ und mit dem Satz von Lebesgue gilt

$$H_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_1} H(f) \ .$$

Mit Lemma (5.1.) hat man $F_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{\sigma'} 0$ (man wähle dort $\Gamma' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \kappa^n(\mathbb{R})$).
Insgesamt folgt:

$$n \cdot \frac{1}{n}\big(F(f) + H_n(f) - F_n(f)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\sigma'} F(f) + H(f).$$

Als nächstes wollen wir zeigen, daß es ein $G \in L_1(\mu,X)'$ gibt, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathbb{R}$:

$$\langle F(f)\,,\,G\rangle = 1 = \langle F_n(f)\,,G\rangle \quad \text{und}$$

$$\langle H_n(f),\,G\rangle = 0 = \langle H(f)\,,G\rangle \quad \text{gilt.}$$

Es sei $P : X \to X_0$ die stetige Projektion von $X = \big(\ell_1(\Lambda) \oplus \ell_\infty(\mathbb{R})\big)_\infty$ auf $X_0 := \ell_1(\Lambda)$. Nach Lemma (5.2.) existiert ein $\tilde{G} \in L_1(\mu,X_0)'$ derart, daß für $f \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ (man beachte, daß $\Gamma_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \kappa^n(\mathbb{R})$ ist):

$$\langle P \circ F(f)\,,\tilde{G}\rangle = 1 = \langle P \circ F_n(f)\,,\tilde{G}\rangle\,.$$

Nun ist $P^* : X_0' \to X'$ stetig mit $\|P^*\| = 1$, d.h. $G := P^* \circ \tilde{G} : S \to X'$ ist w*-meßbar und μ-wesentlich beschränkt, also $G \in L_1(\mu,X)'$ (vgl. [29, S.99, Cor.]). Für $f \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $\langle F(f),G\rangle = 1 = \langle F_n(f),G\rangle$.
Aber wir haben zusätzlich: Ist $y' \in X_0'$ und $f \in \mathbb{R}$, so erhält man $\langle(\underline{0}\,,e_f)\,,P^*y'\rangle = \langle P^*\big((\underline{0}\,,e_f)\big)\,,y'\rangle = 0$, d.h. für alle $f \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$\langle H_n(f)\,,G\rangle = 0 = \langle H(f)\,,G\rangle.$$

Wir definieren nun den Teilraum

$$\tilde{L} := \Big\{ \sum_{f\in\mathbb{R}} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{f,n}}{n} \big(F(f) + H_n(f) - F_n(f)\big) + b_f\big(F(f) + H(f)\big)\Big)\,;$$

$$\sum_{f\in\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \Big|\frac{a_{f,n}}{n}\Big| < \infty\,,\ (b_f)_{f\in\mathbb{R}} \in \ell_1(\mathbb{R})\Big\}$$

und wollen

(4) $L = \tilde{L}$ zeigen.

Beweis:

I) $\tilde{L} \subset L$: Für alle $f \in \mathbb{R}$ ist $F(f) + H(f) \in L$, somit ist mit

$b = (b_f)_{f\in\mathbb{R}} \in \ell_1(\mathbb{R})$: $\sum_{f\in\mathbb{R}} b_f\big(F(f) + H(f)\big) \in L$

(L ist $\|\cdot\|_1$-abgeschlossen).

Ferner gilt für $f \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$: $\big(F(f) + H_n(f) - F_n(f)\big) \in L$.

Da $\sum_{f\in\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_{f,n}}{n}\right| < \infty$, folgt aufgrund der $\|\cdot\|_1$-Abgeschlossenheit

von L : $\sum_{f\in\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{f,n}}{n} \big(F(f) + H_n(f) - F_n(f)\big) \in L$.

II) span $K \subset \tilde{L}$ ergibt sich aus der Definition von $\tilde{L}$.

III) Wir zeigen, daß $\tilde{L}$ σ'-abgeschlossen ist und mit II) folgt: $L = \tilde{L}$.

Es sei $(F^\alpha)_{\alpha\in I} \subset \tilde{L}$ ein gegen $F \in L$ σ'-konvergentes Netz

$$\left\{F^\alpha = \sum_{f\in\mathbb{R}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^\alpha_{f,n}}{n} \big(F(f) + H_n(f) - F_n(f)\big) + b^\alpha_f\big(F(f) + H(f)\big)\right)\right\} .$$

(5) Ist $f \in \mathbb{R}$, so existiert nach Lemma (5.2.) $\big(\Gamma_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \kappa^n(\mathbb{R})$ Γ_2 in

Lemma (5.2.)$\big)$ ein $\tilde{g}_f \in L_\infty(\mu, X_0')$ mit

$\langle P \circ F(f'), \tilde{g}_f\rangle = \delta_{f'f}$ und

$\langle P \circ F_n(f'), \tilde{g}_f\rangle = 0$ für $n \in \mathbb{N}$, $f' \in \mathbb{R}$.

$g_f := P^* \circ \tilde{g}_f : S \to X'$ ist stark meßbar (denn P^* ist stetig) und,

da wir für alle $f' \in \mathbb{R}$ und $y' \in X_0'$ $\langle e_{f'}, P^*y'\rangle = \langle Pe_{f'}, y'\rangle = 0$

haben, folgt für $f' \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$\langle H_n(f'), g_f\rangle = 0 = \langle H(f'), g_f\rangle$.

Ferner gilt nach Lemma (5.2.): Ist $J \subset \mathbb{R}$ endlich, so ist

$$\Big\|\sum_{f\in J} \varepsilon_f\, g_f\Big\|_{L_\infty(\mu,X')} = \Big\|\sum_{f\in J} P^*(\varepsilon_f\, \tilde{g}_f)\Big\|_{L_\infty(\mu,X')} \leq$$

$$\leq \|P^*\| \Big\|\sum_{f\in J} \varepsilon_f\, \tilde{g}_f\Big\|_{L_\infty(\mu,X_0')} \leq 1$$

(wobei $\varepsilon_f \in \{-1,1\}$ für $f \in J$).

(6) Die gleiche Argumentation liefert für $f \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$g_f^n \in L_\infty(\mu,X')$ mit:

$$\langle F_n(f), g_f^n\rangle = 1 \quad , \quad \langle F(f'), g_f^n\rangle = 0 \quad \text{für } f' \in \mathbb{R},$$

$$\langle F_m(f'), g_f^n\rangle = 0 \quad \text{für } m \neq n \text{ oder } f' \neq f,$$

sowie für $f' \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$

$$\langle H_m(f'), g_f^n\rangle = 0 = \langle H(f'), g_f^n\rangle .$$

Auch hier gilt: Sind $J \subset \mathbb{R}$ endlich und $m \in \mathbb{N}$, so ist

$$\sum_{f\in J} \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_{f,n} \; g_f^n \in B(L_\infty(\mu,X'))$$ (wobei $\varepsilon_{f,n} \in \{-1,1\}$ für $f \in J$ und $n \in \mathbb{N}$).

Für $f \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ haben wir:

$$(7) \quad \langle F^\alpha, g_f^n\rangle = \frac{a_{f,n}^\alpha}{n} \xrightarrow{\alpha \in I} \frac{a_{f,n}}{n} = \langle F, g_f^n\rangle$$

$$(8) \quad \langle F^\alpha, g_f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{f,n}^\alpha}{n} + b_f^\alpha \xrightarrow{\alpha \in I} c_f = \langle F, g_f\rangle .$$

Falls für $f \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ $\varepsilon_f \in \{-1,1\}$ bzw. $\varepsilon_{f,n} \in \{-1,1\}$ derart gewählt ist, daß $\varepsilon_f c_f = |c_f|$ bzw. $\varepsilon_{f,n} \frac{a_{f,n}}{n} = \left|\frac{a_{f,n}}{n}\right|$, so erhalten wir für endliches $J \subset \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{f\in J} \sum_{n=1}^{m} \left|\frac{a_{f,n}}{n}\right| = \langle F, \sum_{f\in J} \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_{f,n} \, g_f^n\rangle \leq \|F\|_1 ,$$

also $\sum_{f\in \mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_{f,n}}{n}\right| < \infty$ und

$$\sum_{f\in J} |c_f| = \langle F, \sum_{f\in J} \varepsilon_f \, g_f\rangle \leq \|F\|_1 .$$

Also ist $(c_f)_{f\in\mathbb{R}} \in \ell_1(\mathbb{R})$, und für $b_f := c_f - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{f,n}}{n}$ gilt $(b_f)_{f\in} \in \ell_1(\mathbb{R})$.

Somit können wir folgendes Element $\tilde{F} \in \tilde{L}$ definieren:

$$\tilde{F} := \sum_{f\in\mathbb{R}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{f,n}}{n} \big(F(f) + H_n(f) - F_n(f)\big) + b_f\big(F(f) + H(f)\big)\right)$$

Unser Ziel ist es, $F = \tilde{F}$ zu zeigen.

Dazu genügt es nachzuweisen, daß für $A \in \Sigma$

$I_A(F) = I_A(\tilde{F})$ gilt.

Die Dichtheit der Zylindermengen $\mathfrak{Z} \subset \Sigma$ (vgl. (1.3.1.8.)) zeigt, daß dies äquivalent ist zu:

$I_A(F) = I_A(\tilde{F})$ für alle $A \in \mathfrak{Z}$.

Sei also $A = B \times \prod_{\gamma\in\Gamma\setminus T} \Omega$ mit $T \subset \Gamma$ endlich und $B \in \bigotimes_{\gamma\in T} \mathcal{A}$. Da T endlich ist, existiert eine endliche Teilmenge $J \subset \mathbb{R}$ und ein $m \in \mathbb{N}$ mit:

$T \subset \bigcup_{n=0}^{m} \kappa^n(J) \cup \tau(J)$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze $A^k := A \cap \bigcap_{f\in J} \{s \in S\,;\|H(f)(s)\| \leq k\}$.

Es gilt $\mu(A \setminus A^k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Haben wir also $I_{A^k}(F) = I_{A^k}(\tilde{F})$ gezeigt, so sind wir fertig.

Ist $x' \in X'$, so gilt für $k \in \mathbb{N}$ und $f \in J$:

$$(9)\quad \Big\langle \int_{A^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{\alpha}_{f,n}}{n} H_n(f) + b_f\, H(f)\, d\mu,\, x' \Big\rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a^{\alpha}_{f,n}}{n} \langle H_n(f), x'\chi_{A^k}\rangle + \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{a^{\alpha}_{f,n}}{n} + b^{\alpha}_f\right) \langle H_k(f), x'\chi_{A^k}\rangle$$

$$\xrightarrow[6)\text{u.}7)]{\alpha\ \in\ I} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_{f,k}}{n} \langle H_n(f), x'\chi_{A^k}\rangle + \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_{f,n}}{n} + b_f\right) \langle H_k(f), x'\chi_{A^k}\rangle$$

$$= \Big\langle \int_{A^k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_{f,n}}{n} H_n(f)\, d\mu\,, x'\Big\rangle + \Big\langle \int_{A^k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_{f,n}}{n} H_n(f) + b_f\, H(f)\, d\mu\,, x'\Big\rangle$$

$$= \Big\langle \int_{A^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{f,n}}{n} H_n(f) + b_f\, H(f)\, d\mu\,,\, x'\Big\rangle\,.$$

Für $f \in J$ ist $\{s \in S;\ \|H(f)(s)\| \leq k\} =$

$\{s \in S;\ \|\tau(f)\big(s(\tau(f))\big)\| \leq k\} =$

$\{t \in\ ]0,1[\ ;\ |f(t)| \leq k\} \times \prod_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ \gamma\neq\tau(f)}} \Omega$

Somit läßt sich A^k in der Form

$$A^k = B \times \prod_{\gamma\in\Gamma\setminus(T\cup\tau(J))} \Omega \quad \text{mit} \quad B \in \bigotimes_{\gamma\in T\cup\tau(J)} \mathcal{A} \quad \text{darstellen.}$$

Nach Lemma (5.1.) gilt dann:

Ist $f \notin J$ und $j \in \mathbb{N}$, so hat man:

$$\int_{A^k} H(f)\,d\mu = \int_{A^k} H_j(f)\,d\mu = \int_{A^k} F(f)\,d\mu = \int_{A^k} F_j(f)\,d\mu = 0\,,$$

sowie für $f \in J$ und $n > m$: $\int_{A^k} F_n(f)\,d\mu = 0.$

Somit erhalten wir für $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\langle \int_{A^k} F^\alpha\,d\mu, x'\rangle = \\
&= \langle \int_{A^k} \sum_{f\in R} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^\alpha_{f,n}}{n} \{F(f) + H_n(f) + F_n(f)\} + b^\alpha_f \{F(f) + H(f)\} \right) d\mu, x'\rangle \\
&= \langle \int_{A^k} \sum_{f\in J} \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^\alpha_{f,n}}{n} + b^\alpha_f \right) F(f) - \sum_{n=1}^{m} \frac{a^\alpha_{f,n}}{n} F_n(f) \right) d\mu, x'\rangle \; + \\
&\qquad \langle \int_{A^k} \sum_{f\in J} \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^\alpha_{f,n}}{n} H_n(f) \right) + b^\alpha_f H(f) \right) d\mu, x'\rangle \\
&\xrightarrow[\text{nach 7),8) und 9)}]{\alpha\in I} \langle \int_{A^k} \sum_{f\in J} \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{f,n}}{n} + b_f \right) F(f) - \sum_{n=1}^{m} \frac{a_{f,n}}{n} F_n(f) \right) d\mu, x'\rangle \; + \\
&\qquad \langle \int_{A^k} \sum_{f\in J} \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{f,n}}{n} H_n(f) \right) + b_f H(f) \right) d\mu, x'\rangle \\
&= \langle \int_{A^k} \tilde{F}\,d\mu, x'\rangle \,.
\end{aligned}$$

Nun gilt aber auch $\langle \int_{A^k} F^\alpha\,d\mu, x'\rangle \xrightarrow{\alpha\in I} \langle \int_{A^k} F\,d\mu, x'\rangle$ aufgrund der σ'-$\sigma(X,X')$-Stetigkeit von I_{A^k}. Wir haben also:

$$I_{A^k}(F) = I_{A^k}(\tilde{F}) \quad \text{und damit insgesamt} \quad \tilde{F} = F.$$

Dies beendet den Beweis der σ'-Abgeschlossenheit von $\tilde{L}$ und wir erhalten $L = \tilde{L}$.

Es sei nun K_0 eine beliebige σ'-kompakte Teilmenge von L, wobei wir $K_0 = \operatorname{aco} K_0$ annehmen. Zur Folge $(n\,K_0)_{n\in\mathbb{N}}$ sei $G :]0,1] \to \mathbb{R}$ der "σ-Integrierbarkeitsmodul" von $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\,K_0$ (Anhang III) gebildet. Nach Anhang III (4) wissen wir, daß es ein $f_0 \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\liminf_{z\to 0+} \frac{G(Z)}{\omega_{\mathbb{R}}(f_0, z, \mathbb{P})} = 0.$$

Dann gilt für $F := F(f_0) + H(f_0)$ und $z \in]0,1]$ $\quad \omega_X(F,z,\mu) \geq \omega_{\mathbb{R}}(f_0,z,\mathbb{P})$.

<u>Beweis:</u>

Sei $z \in]0,1]$ und $C \in \mathcal{C}$ mit $\mathbb{P}(C) \leq z$, so setze man

$A := C \times \prod_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \gamma\neq\tau(f)}} \Omega$, also ist $\mu(A) = \mathbb{P}(C)$.

Ist $e_{f_0} \in \ell_1(R)$ (e_{f_0} Einheitsvektor) und $s \in S$, so gilt:

$$\|F(f_0)(s) + H(f_0)(s)\| \geq |\langle F(f_0)(s) + H(f_0)(s), (\underline{0}, e_{f_0})\rangle|$$
$$= |\langle H(f_0)(s), (\underline{0}, e_{f_0})\rangle|.$$

Also hat man $\int_A \|F\|\,d\mu \geq \int_A |\langle H(f_0)(s), (\underline{0}, e_{f_0})\rangle|\,d\mu(s) = \int_A \|H(f_0)\|\,d\mu$.

Nun kann man aber nach Lemma (5.1. ii)) (mit $\bar{A} := \Omega$)

$\int_A \|H(f_0)\|\,d\mu = \int_C \|\tau(f_0)(t)\|\,d\mathbb{P}(t)$ feststellen.

Andererseits ist $\int_C \|\tau(f_0)(t)\|\,d\mathbb{P}(t) = \int_C |f_0(t)|\,d\mathbb{P}(t)$, so daß also insgesamt $w_X(F,z,\mu) \geq w_{\mathbb{R}}(f_0,z,\mathbb{P})$ folgt.

Man hat dann: $F \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} n\,K_0$ nach Anhang III) (2).

Wir nehmen nun an, es gibt $(F(k))_{k\in\mathbb{N}} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} n\,K_0$ mit $\|F(k) - F\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$,

wobei für $k \in \mathbb{N}$

$$F(k) = \sum_{f\in\mathbb{R}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^k_{f,n}}{n} \left(F(f) + H_n(f) - F_n(f)\right) + b^k_f(F(f) + H(f))\right)$$

(vgl. hierzu die Darstellung von $\tilde{L}$ und (4)).

Es sei $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $k \geq k_0$: $\|F(k) - F\|_1 < \frac{1}{4}$.

Man wähle zu $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ $\varepsilon_{n,k} \in \{-1,1\}$ mit $\varepsilon_{n,k}\, a^k_{f_0,n} = |a^k_{f_0,n}|$.

Nach (6) ist für $m \in \mathbb{N}$ $\sum_{n=1}^{m} \varepsilon_{n,k}\, g^n_{f_0} \in B(L_\infty(\mu,X'))$, so daß für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{m} \left|\frac{a^k_{f_0,n}}{n}\right| \overset{(6)}{=} \left| < \sum_{j=1}^{m} \frac{a^k_{f_0,j}}{j} F_j(f_0) , \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_{n,k}\, g^n_{f_0} > \right| \overset{(6)}{=}$$

$$= \left| < F(k) - \big(F(f_0) + H(f_0)\big), \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_{n,k}\, g^n_{f_0} > \right| \leq \|F(k) - F\|_1 < \tfrac{1}{4} .$$

Wir können damit folgern:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a^k_{f_0,n}}{n}\right| < \tfrac{1}{4} \quad \text{für} \quad k \geq k_0 .$$

Ferner gilt für $k \geq k_0$:

$$\|F(k) - F\|_1 \geq \left| < F(k) - \big(F(f_0) + H(f_0)\big) , g_{f_0} > \right|$$

$$= \left| \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^k_{f_0,n}}{n} + b^k_{f_0} \right) - 1 \right) < F(f_0) , g_{f_0} > \right|$$

$$= \left| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^k_{f_0,n}}{n} + b^k_{f_0} \right) - 1 \right| .$$

Somit ist für alle $k \geq k_0$: $b^k_{f_0} \geq \frac{1}{2}$.

Für $s \in S$ und $k \geq k_0$ gilt dann für den Einheitsvektor $e_{f_0} \in \ell_1(R)$

$$\|F(k)(s)\| \geq \left| < F(k)(s) , (\underline{0} , e_{f_0}) > \right|$$

$$= \left| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^k_{f_0,n}}{n} H_n(f_0)(s), (\underline{0}, e_{f_0}) > + < b^k_{f_0} H(f_0)(s), (\underline{0}, e_{f_0}) > \right|$$

$$\geq b^k_{f_0} \left| < H(f_0)(s), (\underline{0}, e_{f_0}) > \right| -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a^k_{f_0,n}}{n}\right| \left| < H_n(f_0)(s) , (\underline{0}, e_{f_0}) > \right|$$

$$\geq \tfrac{1}{2}|\langle H(f_0)(s),(\underline{0},e_{f_0})\rangle| - \tfrac{1}{4}|\langle H(f_0)(s),(\underline{0},e_{f_0})\rangle|$$

$$= \tfrac{1}{4}|\langle H(f_0)(s),(\underline{0},e_{f_0})\rangle|$$

(man beachte, daß für $s \in S$ nach Definition von $H_n(f)$ gilt:

$H_n(f_0)(s) = H(f_0)(s)$ falls $\|H(f_0)(s)\| \leq n$, und

$H_n(f_0)(s) = 0$ falls $\|H(f_0)(s)\| > n$).

Damit gilt für $A = C \times \prod_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \gamma\neq\tau(f_0)}} \Omega$, $C \in \mathbf{A}$

$$\int_A \|F(k)(s)\|\,d\mu(s) \geq \int_A \tfrac{1}{4}|\langle H(f_0)(s),(\underline{0},e_{f_0})\rangle|\,d\mu(s) = \int_C \tfrac{1}{4}|f_0(t)|\,dt.$$

(siehe oben). Es läßt sich somit für $z \in]0,1]$ und $k \geq k_0$ folgern:

$$\omega_x(4F(k),z,\mu) \geq \omega_{\mathbb{R}}(f_0,z,\mathbb{P}).$$

Wir haben also $\liminf_{z\to 0+} \dfrac{G(z)}{\omega_x(F(k),z,\mathbb{P})} = 0$ und $F(k) \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\,K_0$ nach Anhang III (2).

Somit ist für jede σ'-kompakte Teilmenge $K_0 \subset L$ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\,K_0$ nicht normdicht in L, d.h. für jede σ'-kompakte Teilmenge $K_0 \subset L$ ist

$$\overline{\mathrm{span}}^{\|\cdot\|_1} K_0 \subsetneq L.$$

Wir wollen abschließend zeigen, daß L nicht schwach Lindelöf ist.

Dazu beweisen wir, daß $M := \{F(f) + H(f);\ f\in\mathbb{R}\}\cup\{0\}$ in L schwach abgeschlossen und nicht schwach Lindelöf ist.

(10) Der lineare Operator $\mathbb{P} : L_1(\mu,X) \to L_1(\mu,X)$

$$F \mapsto P\circ F$$

ist beschränkt (dies folgt aus $\|P\| \leq 1$ und [14, S.47,Th.6]).

(11) Die Menge $\{F(f);\ f\in\mathbb{R}\} \cup \{0\}$ ist nach Lemma (5.1.ii)) σ'- kompakt (man setze dort $\Gamma' := \kappa^{\circ}(\mathbb{R})$).

Weil $\overline{\mathrm{span}}^{\|\cdot\|} M = \{\sum_{f\in\mathbb{R}} b_f(F(f)+H(f));\ (b_f)_{f\in\mathbb{R}} \in \ell_1(\mathbb{R})\}$ schwach abgeschlossen ist, folgt mit (10) und (11), daß $M = \mathbb{P}^{-1}(\{F(f);\ f\in\mathbb{R}\} \cup \{0\}) \cap \overline{\mathrm{span}}^{\|\cdot\|} M$

schwach abgeschlossen ist.

Für $f,f' \in \mathbb{R}$ folgt:

(12) $\langle F(f) + H(f), G - g_{f'} \rangle = 1 - \delta_{ff'}$ (dabei ist $G \in L_1(\mu,X)'$ das auf S.246 gebildete Funktional),

$\{ \{ F \in M; |\langle F - (F(f)+H(f)), G - g_f \rangle| < 1 \}, f \in \mathbb{R} \}$ ist eine Überdeckung von M aus schwach offenen Mengen, die wegen (12) keine abzählbare Teilüberdeckung besitzt ($\mathbb{R}$ ist überabzählbar).

Anhang

Anhang I:

Es gibt eine Isometrie aufs Bild $I : \ell_1([0,1]) \to \ell_\infty$.

Beweis: Wir zeigen, daß es ein Mengensystem $\mathfrak{T} \subset \mathrm{Pot}_\infty(\mathbb{N})$,

$\mathrm{Pot}_\infty(\mathbb{N}) := \{N \subset \mathbb{N} ;\ \mathrm{card}\, N = \aleph_0\}$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

Für alle $N_1, N_2 \in \mathfrak{T}$, $N_1 \neq N_2$ ist $\mathrm{card}\,(N_1 \cap N_2) < \infty$ und $\mathrm{card}\,\mathfrak{T} = \mathrm{card}\,([0,1])$.

Beweis hierzu: Für $i,j \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq 2^j$ seien

$I_{i,j} := [(i-1)2^{-j}, i2^{-j}[$ für $i < 2^j$ und

$I_{2^j,j} := [1-2^{-j}, 1]$.

Für alle $j \in \mathbb{N}$ hat man:

(1) $[0,1] = \bigcup_{i=1}^{2^j} I_{i,j}$.

Wir zählen $\{I_{i,j} ;\ 1 \leq i \leq 2^j, j \in \mathbb{N}\} = \{I_1, I_2, \ldots\}$ derart ab, daß für $n,m \in \mathbb{N}$, $n > m$:

(2) $I_n \subset I_m$ oder $I_n \cap I_m = \emptyset$ gilt.

Man definiere nun für $r \in [0,1]$: $N_r := \{n \in \mathbb{N} ;\ r \in I_n\}$.

Wegen (1) ist $N_r \in \mathrm{Pot}_\infty(\mathbb{N})$. Damit ist die Abbildung

$\tau : [0,1] \to \mathrm{Pot}_\infty(\mathbb{N})$

$r \mapsto N_r$ wohldefiniert.

Da die Länge der Intervalle I_n für $n \to \infty$ verschwindet, hat man mit (2):

$\mathrm{card}\,(N_r \cap N_{r'}) < \infty$ für $r \neq r'$, $r,r' \in [0,1]$.

Somit ist insbesondere τ injektiv und $\mathfrak{T} := \tau([0,1])$ das gewünschte Mengensystem.

Man zählt nun die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ab, $\{A \subset \mathbb{N};\ A \subset \mathbb{N}$ endlich$\} = \{A_1, A_2, \ldots,\}$, und vereinigt sie disjunkt $\Gamma := \dot{\bigcup}_{j \in \mathbb{N}} A_j$.

Für $N \in \mathfrak{T}$ definieren wir $b_N = (b_N(\gamma))_{\gamma \in \Gamma} \in {}_\infty$ wie folgt:

$$b_N(\gamma) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \gamma \in A_j \text{ und } A_j \cap N \neq \emptyset \\ -1 & \text{falls } \gamma \in A_j \text{ und } A_j \cap N = \emptyset \end{cases}.$$

Wenn man mit $(e_N)_{N \in \mathfrak{T}}$ die Einheitsvektoren in $\ell_1(\mathfrak{T})$ bezeichnet, läßt sich folgende lineare Abbildung definieren:

$$T : \operatorname{span}\{e_N;\ N \in \mathfrak{T}\} \to {}_\infty$$

$$\sum_{n=1}^{m} a_n\, e_{N_n} \mapsto \sum_{n=1}^{m} a_n\, b_{N_n}$$

T ist eine Isometrie aufs Bild.

<u>Beweis hierzu:</u> Wir setzen zu $\sum_{n=1}^{m} a_n\, e_{N_n} \in \operatorname{span}\{e_N;\ N \in \mathfrak{T}\}$

$M^+ := \{1 \leq n \leq m\ ;\ a_n > 0\}$ und $M^- := \{1 \leq n \leq m\ ;\ a_n < 0\}$,

wobei wir o.E. $M^+ \neq \emptyset$ annehmen.

Zu $n \in M^+$ gibt es nach Wahl des Teilsystems $\mathfrak{T}$ ein $i_n \in N_n$ derart, daß $i_n \notin N_k$ für $k \in M^-$.

Man findet nun genau ein $j \in \mathbb{N}$ mit $A_j = \{i_n;\ n \in M^+\}$.

Damit ist

$A_j \cap N_n \neq \emptyset$ für $n \in M^+$ und

$A_j \cap N_n = \emptyset$ für $n \in M^-$.

Für ein $\gamma_0 \in A_j$ gilt

$b_{N_n}(\gamma_0) = 1$ für $n \in M^+$ und

$b_{N_n}(\gamma_0) = -1$ für $n \in M^-$.

Also ergibt sich:

$$\|\sum_{n=1}^{m} a_n\, b_{N_n}\|_\infty \geq \sum_{n=1}^{m} a_n\, b_{N_n}(\gamma_0)$$
$$= \sum_{n\in M_+} a_n\, b_{N_n}(\gamma_0) + \sum_{n\in M_-} a_n\, b_{N_n}(\gamma_0)$$
$$= \sum_{n\in M_+} a_n + \sum_{n\in M_-} |a_n| = \sum_{n=1}^{m} |a_n| \ .$$

Für alle $N \in \mathfrak{T}$ ist $\|b_N\|_\infty \leq 1$. Somit folgt

$$\|\sum_{n=1}^{m} a_n\, b_{N_n}\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{m} |a_n|,$$

und T ist eine Isometrie aufs Bild, die zu einer Isometrie aufs Bild $\tilde{T} : \ell_1(\mathfrak{T}) \to \ell_\infty$ fortsetzbar ist.

Wegen (*) erhält man damit die Behauptung. □

<u>Anhang II:</u>

Ist Γ eine unendliche Menge, so gibt es eine Isometrie $I : \ell_1(\Gamma) \to \ell_\infty(\Gamma)$ aufs Bild.

<u>Beweis:</u> Wir betrachten $\mathrm{Pot}_e(\Gamma) := \{A \subset \Gamma \ ; \ A \text{ ist endlich}\}$ und zählen $\mathrm{Pot}_e(\Gamma) = \{A_\alpha ; \alpha < \tau\}$ ab (τ ist die erste Ordinalzahl der Kardinalität von Γ).

Man setze $\Lambda := \bigcup_{\alpha<\tau} (A_\alpha \times \{\alpha\})$ und definiere für $\gamma \in \Gamma$ $b_\gamma \in \ell_\infty(\Lambda)$ durch

$$b_\gamma(\lambda) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \lambda = (y,\alpha) \text{ und } y,\gamma \in A_\alpha \\ -1 & \text{falls } \lambda = (y,\alpha) \text{ und } \gamma \notin A_\alpha \ , \ y \in A_\alpha \ . \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit $(e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ die Einheitsvektoren von $\ell_1(\Gamma)$, so ist die Abbildung

$$T : \mathrm{span}\{e_\gamma ; \gamma \in \Gamma\} \to \ell_\infty(\Lambda)$$
$$\sum_{n=1}^{m} a_n\, e_{\gamma_n} \mapsto \sum_{n=1}^{m} a_n\, b_{\gamma_n}$$

eine Isometrie aufs Bild, denn:

Für $\sum_{n=1}^{m} a_n e_{\gamma_n} \in \operatorname{span}(e_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ setze man

$A^0 := \{\gamma_n;\ a_n \quad 0, 1 \leq n \leq m\}$ und $A^1 := \{\gamma_n;\ a_n < 0, 1 \leq n \leq m\}$.

Also gilt:

$$\|T(\sum_{n=1}^{m} a_n e_{\gamma_n})\|_\infty = \|T(\sum_{\gamma_n \in A^0} a_n e_{\gamma_n}) - T(\sum_{\gamma_k \in A^1} |a_k|\ e_{\gamma_k})\|_\infty$$

Nun gilt $A^0 \cap A^1 = \emptyset$, so daß für $A^0 = A_{\alpha_0}$ und $A^1 = A_{\alpha_1}$ folgt:

Für alle $\gamma_n \in A^0$ ist

$$b_{\gamma_n}(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \lambda \in A_{\alpha_0} \times \{\alpha_0\} \\ -1 & \text{falls} \quad \lambda \in A_{\alpha_1} \times \{\alpha_1\} \end{cases} .$$

Analog gilt für $\gamma_k \in A^1$:

$$b_{\gamma_k}(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \lambda \in A_{\alpha_1} \times \{\alpha_1\} \\ -1 & \text{falls} \quad \lambda \in A_{\alpha_0} \times \{\alpha_0\} \end{cases} .$$

Damit gilt:

$$\|T(\sum_{\gamma_n \in A_{\alpha_0}} a_n e_{\gamma_n}) - T(\sum_{\gamma_k \in A_{\alpha_1}} |a_k|\ e_{\gamma_k})\| =$$

$$= \|\sum_{\gamma_n \in A_{\alpha_0}} a_n b_{\gamma_n} - \sum_{\gamma_k \in A_{\alpha_1}} |a_k|\ b_{\gamma_k}\| \geq$$

$$\geq \max\{\max(|\sum_{\gamma_n \in A_{\alpha_0}} a_n b_{\gamma_n}(\lambda) - \sum_{\gamma_k \in A_{\alpha_1}} |a_k|\ b_{\gamma_k}(\lambda)|;$$

$$\lambda \in A_{\alpha_i} \times \{\alpha_i\}); i=0,1\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} |a_n \quad .$$

Andererseits ist

$$\|T(\sum_{n=1}^{m} a_n e_{\gamma_n})\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{m} |a_n|\ \|T e_{\gamma_n}\|_\infty = \sum_{n=1}^{m} |a_n| \quad .$$

Also ist T auf einem dichten Teilraum von $\ell_1(\Gamma)$ eine Isometrie aufs Bild und läßt sich somit zu einer Isometrie aufs Bild

(*) $T : \ell_1(\Gamma) \to \ell_\infty(\Lambda)$ fortsetzen.

Die Mengen Γ und Λ besitzen dieselbe Kardinalität.

Damit gibt es eine Isometrie $j : \ell_\infty(\Lambda) \to \ell_\infty(\Gamma)$, und wir erhalten mit (*) die Aussage. □

Anhang III:

Wir beweisen nun eine Hilfsaussage, die wir für das Beispiel (5.5.) in Paragraph 5 benutzten.

Sind Y ein Banachraum und $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, dann definiere man für $f \in L_1(\mathbb{P}, Y)$ und $z \in]0,1]$:

$$\omega_Y(f,z,\mathbb{P}) := \sup\{\int_A \|f\| \, d\mathbb{P} \, ; \, A \in \mathbb{A} \text{ und } \mathbb{P}(A) \leq z\} .$$

Für eine gleichgradig integrierbare Teilmenge $K \subset L_1(\mathbb{P}, Y)$ gilt

$$(1) \quad \sup_{f \in K} w_Y(f,z,\mathbb{P}) \xrightarrow{z \to 0} 0 .$$

Ist nun $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge beschränkter Teilmengen von $L_1(\mathbb{P}, Y)$, $K_n \subset K_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ und $K := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, so setze man

$$G_n(z) := \sup_{f \in K_n} w_Y(f,z,\mathbb{P}) \quad (z \in]0,1]) \qquad \text{und}$$

$$\lambda_n := G_n(1) + 1 \qquad (n \in \mathbb{N}) .$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $G_n(\cdot)$ monoton wachsend, so daß auch

$$G(z) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{G_n(z)}{\lambda_n \, 2^n} \quad \text{monoton wachsend ist mit} \quad G(1) \leq 1.$$

Wir nennen G den "σ-Integrierbarkeitsmodul" von K. Wenn nun für alle $n \in \mathbb{N}$ K_n gleichgradig integrierbar ist, so gilt aufgrund von (1)

$$\lim_{z \to 0^+} G(z) = 0 .$$

Ferner hat man für $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ K_n beschränkt, $K_n \subset K_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$:

(2) Ist $f \in K$, so gilt:

$$\liminf_{z\to 0^+} \frac{G(z)}{w_y(f,z,\mathbb{P})} > 0 ,$$

denn: Ist $f \in K$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit für alle $n \geq n_0$: $f \in K_n$. Damit ist aber für $n \geq n_0$ $G_n(z) \geq w_y(f,z,\mathbb{P})$ $(z \in]0,1])$.

Also erhält man für $z \in]0,1]$:

$$\frac{G(z)}{w_y(f,z,\mathbb{P})} \geq \frac{1}{w_y(f,z,\mathbb{P})} \sum_{n\geq n_0} \frac{G_n(z)}{\lambda_n\, 2^n} \geq \sum_{n\geq n_0} \frac{1}{2^n\, \lambda_n} > 0.$$

Es sei nun λ das Lebesguesche Maß auf $]0,1]$ und

$$\mathfrak{R} := \{f \in L_1(\lambda) ;\ \int_0^1 |f|\, d\lambda = 1 \text{ und für alle } n \in \mathbb{N} \int_0^1 f\, \chi_{\{|f|\leq n\}}\, d\lambda = 0\}.$$

(3) Dann ist $\mathfrak{R}$ nicht in der Form $\mathfrak{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, $K_n \subset K_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ und K_n gleichgradig integrierbar (d.h. K_n relativ schwach kompakt) darstellbar.

Denn: Angenommen, es gibt eine derartige Darstellung; dann sei $G :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ der nach oben zugeordnete "σ-Integrierbarkeitsmodul" von $\mathfrak{R}$.

Setzt man für $k \in \mathbb{N}$ $a_1 := 1$ und $a_k := G\left(\frac{1}{k-1}\right)$ für $k \geq 2$ und definiert für $t \in \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$ $(k \in \mathbb{N})$

$$G_0(t) := a_{k+1} + k(k+1)(a_k - a_{k+1})\left(t - \frac{1}{k+1}\right) ,$$

so ist $G_0(t) \geq G(t)$.

$G_0(t)$ ist bis auf $t = \frac{1}{k}$ $(k \geq 2)$ differenzierbar, also kann man definieren:

$$f_0(t) := \begin{cases} \dfrac{G_0'(t)}{4\sqrt{G_0(t)}} & \text{für} \quad 0 < t < \frac{1}{2}, \quad t \neq \frac{1}{k} \quad (k \in \mathbb{N}) \\ -\dfrac{G_0'(1-t)}{4\sqrt{G_0(1-t)}} & \text{für} \quad 1 > t > \frac{1}{2}, \quad 1 - t \neq \frac{1}{k} \quad (k \in \mathbb{N}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

$$\int_{]0,1[} |f_0(t)|\, dt = 2 \cdot \int_{]0,\frac{1}{2}[} \frac{G_0'(t)}{4\sqrt{G_0(t)}}\, dt = \sqrt{G_0(\tfrac{1}{2})} .$$

Dann ist $\frac{1}{\sqrt{a_2}} f_0 \in \mathbb{R}$ und für $z < \frac{1}{2}$ ist

$$\int_{]0,z[} \frac{1}{\sqrt{a_2}} f_0(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \sqrt{G_0(z)} .$$

Also $$\frac{G(1/k)}{w_Y\left(\frac{1}{\sqrt{a_2}} f_0, \frac{1}{k}, \mathbb{P}\right)} \leq \frac{2 \cdot G(1/k) \cdot \sqrt{a_2}}{\sqrt{G_0(1/k)}} \leq \frac{2 \cdot G(1/k)}{\sqrt{G(1/k)}} \sqrt{a_2} =$$
$$= 2\sqrt{G(1/k)}\, \sqrt{a_2} \xrightarrow{k \to \infty} 0 ,$$

was einen Widerspruch darstellt (vgl. (2)).

Es gilt nun andererseits: Ist $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine rechtsseitig stetige monoton wachsende Funktion mit $G(0) = 0$ und gilt für eine beschränkte Teilmenge $K \subset L_1(\mathbb{P},Y)$

$\liminf_{z \to 0+} \frac{G(z)}{w_Y(f,z,\mathbb{P})} > 0$ für alle $f \in K$, dann gibt es eine Folge $(\tilde{K}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L_1(\mu,Y)$ mit $\tilde{K}_n \subset \tilde{K}_{n+1}$, $\tilde{K}_n$ ist gleichgradig integrierbar $(n \in \mathbb{N})$ und $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{K}_n$.

<u>Denn</u> für $k,m \in \mathbb{N}$ definieren wir

$K_{k,m} := \{f \in K \,;\, \omega_Y(f,z,\mathbb{P}) \leq k\, G(z) \text{ falls } z \leq \frac{1}{m}\}$.

Dann ist $K_{k,m}$ wegen der rechtsseitigen Stetigkeit von G in $z = 0$ gleichgradig integrierbar. Ferner gilt $K = \bigcup_{k,m\in\mathbb{N}} K_{k,m}$ aufgrund der Voraussetzung $\liminf_{z \to 0+} \frac{G(z)}{w_Y(f,z,\mathbb{P})} > 0$.

Setzt man $\tilde{K}_n := \bigcup_{k \leq n} K_{k,n}$, so gilt $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{K}_n$, $\tilde{K}_n \subset \tilde{K}_{n+1}$ und $\tilde{K}_n$ ist gleichgradig integrierbar $(n \in \mathbb{N})$.

(4) Mit (3) können wir also feststellen:

Ist $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend mit $G(0) = 0$ und G rechtsseitig stetig, dann gibt es ein $f \in \mathbb{R}$ mit

$$\liminf_{z \to 0^+} \frac{G(z)}{w_{\mathbb{R}}(f, z, \mathbb{P})} = 0. \qquad \square$$

Literaturhinweise

[1] D. Amir, J. Lindenstrauß, "The structure of weakly compact sets in Banach spaces", Ann. of Math. 88 (1968), S.34 - 46

[2] J. Batt, "On weak compactness in spaces of vector valued measures and Bochner integrable functions in connection with the Radon - Nikodým property of Banach-spaces", Rev. Roumaine Pures et Appl. 19 (1974), S.285 - 304

[3] J. Batt, N. Dinculeanu, "On the weak compactness criteria of Kolmogorov - Tamarkin and M. Riesz type in the space of Bochner integrable functions over a locally compact group", Measure Theory and its Applications, Proceedings, Sherbrooke, Canada (1982), Lectures Notes in Mathematics 1033, S.43 - 58

[4] J. Batt, W. Hiermeyer, "On compactness in $L_p(\mu,X)$ in the weak topology and in the topology $\sigma(L_p(\mu,X),L_q(\mu,X'))$", Math. Z. 182 (1983), S.409 - 432

[5] J. Batt, G. Schlüchtermann, "Eberlein compacts in $L_1(X)$", Studia Math. 83 (1986) (3), S.239 - 250

[6] K. Bichteler, "Integration theory (with special attention to vector measures)", Lecture Notes in Mathematics 315

[7] R. Bourgin, "Geometric Aspects of convex sets with the Radon-Nikodým property", Lecture Notes in Mathematics 993

[8] J.K. Brooks, N. Dinculeanu, "Weak compactness in spaces of Bochner integrable functions and applications", Advances in Math. 24 (1977), S.172 - 188

[9] J.K. Brooks, N. Dinculeanu, "Conditional expectations and weak and strong compactness in spaces of Bochner integrable functions", J. Multivariate Analysis 9 (1979), S.420 - 427

[10] D.L. Cohn, "Measure Theory", Birkhäuser, Boston (1980)

[11] A Costé, "Une propriété remarquable de l'espace L^1_E lorsque E possède la propriété de Radon-Nikodým", Prépublication No 17, Université de Caen (1983)

[12] W.J. Davis, N. Ghoussoub, J. Lindenstrauß, "A lattice renorming theorem and applications to vector-valued processes", Trans. of Am. Math. Soc. 263 (1983) S.531 - 540

[13] J. Diestel, "Geometry of Banach Spaces - selected topics", Lecture Notes in Mathematics 485

[14] J. Diestel, J.J. Uhl Jr, "Vector measures", AMS Math. Survey 15, Providence (R.I.) (1977)

[15] N. Dinculeanu, "Vector mesures", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1966) (Hochschulbücher für Math. 64)

[16] N. Dunford, J.T. Schwartz, "Linear Operators I", Interscience Publ., New York (1966)

[17] G.A. Edgar, "Measurability in Banach spaces I", Indiana Univ. Math. J. 26 (1977), S.663 - 677

[18] G.A. Edgar, "Measurability in Banach spaces II", Indiana Univ. Math. J. 28 (1979) S.559 - 579

[19] G.A. Edgar, "On the Radon-Nikodým property and martingale convergence", Vector space measures and applications II), Proceedings, Dublin (1977), Lecture Notes in Mathematics 654, S.62 - 76

[20] R. Engelking, "General topology", Polish Scientific Publ. Warszawa (1977)

[21] K. Floret, "Weakly compact sets", Lecture Notes in Mathematics 801 (1980)

[22] D.H. Fremlin, J.D. Pryce, "Semi-extremal sets and measure representations", Proc. of Lond. Math. Soc. 29 (1974), S.502 - 520

[23] G. Godefroy, S. Troyanski, J.H.W. Whitefield, V. Zizler, "Smoothness in weakly compactly generated Banach spaces", J. of Funct. Analysis 52 (1983), S.344 - 352

[24] G. Godefroy, S. Troyanski, J.H.W. Whitefield, V. Zizler, "Locally uniformly rotund renorming and injections into $c_0(\Gamma)$", Can. Math. Bull. 27 (1984), S.494 - 499

[25] W.H. Graves, "Universal Lusin measurability and subfamiliy summable families in abelian topological groups", Proc. Am. Math. Soc. 73, (1979) S.45-50

[26] P.R. Halmos, "Measure theory", Van Nostrand, New York (1950)

[27] E. Hewitt, K. Stromberg, "Real and abstract analysis", Springer Verlag (1967), Berlin

[28] W. Hiermeyer, "Schwache Kompaktheit in $L_p(\mu,X)$", Dissertation, München (1979)

[29] A. Ionescu -Tulcea, C. Ionescu-Tulcea, "Topics in the theory of lifting", Springer-Verlag, Berlin (1969)

[30] R.C. James, "Weak compactness and reflexivity", Israel J. of Math. 2 (1964), S.101 - 119

[31] H. Jarchow, "Locally convex spaces", B.G. Teubner, Stuttgart (1981)

[32] J.E. Jayne, C.A. Rogers, "Borel selectors for upper semi-continuous set-valued maps", Acta Math. 155 (1985), S.41 - 79

[33] K. Kelly, I. Namioka, "Linear topological spaces", Van Nostrand, Princeton, N.J. (1963)

[34] H.A. Klei, "Compacité faible de parties decomposable de $L^1(E)$", C.R. Acad. Sci. Ser. I 296 (1983), S.965 - 967

[35] H.A. Klei, "Faible compacité dans les espaces de fonctions Bochner-intégrables", C.R. Acad. Sci, 302 Série I, No 3 (1986), S.103 - 106

[36] G. Köthe, "Topologische Vektorräume I", Springer-Verlag Berlin (1966)

[37] H.E. Lacey, "The isometric theory of classical Banach spaces", Springer-Verlag, Berlin (1974)

[38] J.E. Leonard, K. Sundaresan, "Geometry of Lebesgue-Bochner function spaces-smoothness", Trans. of Amer. Math. Soc. 198 (1973), S.229 - 251

[39] J. Lindenstrauß, "Weakly compact sets, their properties and the Banach space they generate", Ann. of Math. Studies 69, Princeton Univ. Press (1972), S.235 - 273

[40] A. Lovalia, "Locally uniformly convex Banach spaces", Trans. of Amer. Math. Soc. 78 (1955), S.225 - 238

[41] E. Saab, "A characterization of w*-compact convex sets having the Radon-Nikodým property", Bull. Sci. Math. 104 (1983), S.79 - 88

[42] H.H. Schaefer, "Topologocal vector spaces", Springer-Verlag, Berlin (1971)

[43] H.H. Schaefer, "Banach lattices and positive operators", Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1974)

[44] L. Schwartz, "Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures", Oxford Univ. Press, London (1973)

[45] W. Seidel, "Träger von Borelmaßen", Dissertation München (1983)

[46] I. Singer, "Bases in Banach Spaces II", Springer-Verlag Berlin (1981)

[47] M.A. Smith, B. Turrett, "Rotundity in Lebesgue-Bochner function spaces", Trans. of Am. Math. Soc. 257 (1980), S.105 - 118

[48] M. Talagrand, "Espaces de Banach fablement κ-analytigues", Ann. of Math. 110 (1979), S.407 - 438

[49] M. Talagrand, "Weak Cauchy sequences in $L^1(E)$", Amer. J. of Math. 106,1 (1984), S.703 - 724

[50] M. Talagrand, "Pettis integral and measure theory", Memoirs of the Amer. Math. Soc., Sept. 1984 Vol. 51, No 307

[51] S. Troyanski, "On locally uniformly convex and differentiable norms in certain non-separable Banach spaces", Stud. Math. 37, (1971), S.173 - 180

[52] S. Troyanski, "On a property of the norm which is close to local uniform rotundity", Math. Ann. 271 (1985), S.305 - 313

[53] L. Vasak, "On one generalization of weakly compactly generated Banach spaces", Stud. Math. 70 (1981), S.11 - 19

[54] G. Winkler, "Inverse limits of simplices and applications in stochastics", Habilitationsschrift München (1983)

[55] V. Zizler, "Locally uniformly rotund renorming and decompositions of Banach spaces", Bull. Austr. Math. Soc. 29 (1984), S.259 - 269

Lebenslauf

16.März 1958	geboren in Iserlohn/NRW Eltern: Werner Schlüchtermann, kaufmännischer Angestellter Thea Schlüchtermann,geb. Vogel, Hausfrau
1965-1966	Besuch der Grundschule in Iserlohn
1966-1969	Besuch der Grundschule in Eschenlohe
1969-1978	Besuch des Werdenfels-Gymnasiums in Garmisch-Partenkirchen
Juni 1978	Abitur
1978-1984	Studium der Mathematik (Studiengang Diplom) an der Ludwig-Maximilians-Universität in München (Nebenfach: Versicherungswissenschaft) Thema der Diplomarbeit: "Die $\sigma(L_1(\mu,X),L_\infty(\mu,X'))$ - Topologie auf dem Raum der Bochner-integrierbaren Funktionen $L_1(\mu,X)$" Betreuer: Prof.Dr. J.Batt
Mai 1984	Diplom
Seit Oktober 1984	wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut (Lehrstuhl Prof.Dr. J.Batt)